

FTAMP 30.19.21

Ә.Т. Жакаш¹ – негізгі автор, | ©
Ә.А. Джакашова², А. Есилханқызы³¹Техн. ғылым. канд., доцент, ²Магистр, ³Магистрант

ORCID

¹<https://orcid.org/0000-0001-8685-9868> ²<https://orcid.org/0000-0001-8827-0053>³<https://orcid.org/0000-0001-5372-8976>^{1,2,3}М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті,

Тараз қ., Қазақстан

¹zhakash58@mail.ru<https://doi.org/10.55956/VCNG9506>

АВТОБАЛАНСИРЛЕР ҚОЗҒАЛЫСЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Аңдатпа. Динамикалық жүйелердің қозғалыстарына айналыстағы роторлар мен бірнеше маятниктердің синхронды қозғалыстарында жатқызуға болады. Айналыстағы роторларға икемді білікті теңгерілмеген дискілер мен автобалансирлер жатқызуға болады. Бұлардың қозғалыстарын математикалық тұрғыдан зерттеуде бірқатар қиындықтар бар. Сондықтан мұндай жүйелердің математикалық моделін құру және оны шешу маңызды мәселе болып табылады.

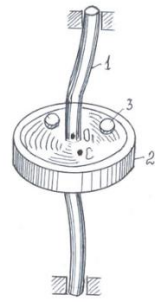
Тірек сөздер: тороидальдық қуыс, теңгерілмеген дискі, статикалық момент, орнықтылық, Лагранж функциясы.



Жакаш, Ә.Т. Автобалансирлер қозғалысының математикалық моделі [Мәтін] / Ә.Т. Жакаш, Ә.А. Джакашова, А. Есилханқызы // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2024. – №3(85). – Б.440-446. <https://doi.org/10.55956/VCNG9506>

Кіріспе. Айналымды қозғалыс жасайтын дискілерде болатын дебалансты автоматты түрде теңгеретін балансирлердің мүмкін бір құрылымдық түрі 1-суретте көрсетілген. Бұл түрдегі балансир айналатын икемді білікке 1, диск 2 бекітілген. Оның ауырлық ортасы, С нүктесі AO_1B білігінде жатпайды. Дискіге сұйық май құйылатындықтан ол цилиндрлік немесе тороидальдық қуыс түрінде болып келеді. Май құйылған қуысқа екі шарик орналасқан. Олар айналу дискінің айналу жағдайына байланысты автоматты түрде дискінің қажетті жеріне орналасып дебалансты теңгеріп, біліктің тербелісін тоқтатып, оның тіректеріне берілетін динамикалық әсерді жояды.

Автобалансирлердің басқада конструкциялық варианттары болуы мүмкін. Мәселен, дискідегі қуастар мен шариктердің орнына, қандайда алшақтықпен білікке кигізілген сақина түрінде болуы мүмкін. Төменде келтірілген автобалансирдің құрылымдық схемасын алғаш рет Е.Сирл ұсынған [1]. Мұндай балансирлер центрифуга типтес машиналарда қолданылады. Олар, әсіресе центрифугалардың роторларының дебаланстары машинаның жұмыс істеу процестері кезінде өзгермелі болған кезде тиімді.



Сурет 1. Автоматты түрде теңгеретін балансир

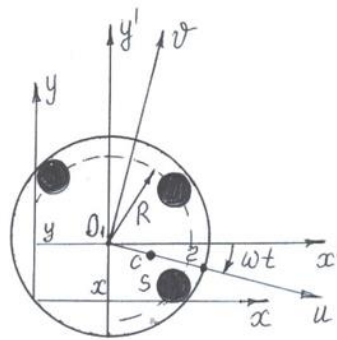
Зерттеу шарттары мен әдістері. Бір теңгерілмеген дискілі, шарикті автобалансир жүйенің қозғалысының дифференциалдық теңдеулер жүйесі келесі түрде өрнектеледі [1]:

$$\ddot{\varphi}_s + \beta_0(\dot{\varphi}_s - \omega) = \frac{1}{R}(\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s) \quad (s = 1, 2, \dots, k), \quad (1)$$

$$M\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = M_1 r \omega^2 \cos \omega t + mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s), \quad (2)$$

$$M\ddot{y} + \beta\dot{y} + cy = -M_1 r \omega^2 \sin \omega t + mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s). \quad (3)$$

Мұндағы (2-сурет) x және y xOy қозғалмайтын жүйесіндегі дискінің O_1 центрінің координаттары. Бұл координаттардың басталуы подшипниктер осьтері мен дискі жазықтығының қиылысында орналасқан; $\varphi_s - s$ -ші шариктің ортасы мен дискінің ортасы O_1 нүктелерін өесатын түзу мен Ox осінің бағыты арасындағы сағат тілінің бағытындағы бұрыш;



Сурет 2. Теңгерілмеген дискінің қимасы

M_1 – дисканың массасы; m – шариктің массасы; $M=M_1+km$ – жүйенің массасы; r – дискінің эксцентриситеті; R – біліктің осінен шариктің ортасына дейінгі арақашықтық; ω – біліктің айналмалы бұрыштың жылдамдығы; $\beta_0 - \beta$ – тұтқыр кедіргілердің коэффициенттері; c – біліктің иілу қатаңдығы).

Автобалансирлер динамикасын зерттегенде (1), (2), (3) дифференциалдық теңдеулерінің шешімдерінің бар болуы мен орнықтылығы қызықтырады, басқаша айтқанда $x(\omega t) = y(\omega t) = 0$ болуы, яғни шешімдердің біліктің тербелісінің болмауын білдірмейтіндігі.

Бұл жерде біз автобалансир есебінің шешімін қарастыру арқылы дискідегі шариктердің синхронды қозғалысы туралы мәселеге келіп тірелеміз. (1), (2) және (3) дифференциалдық теңдеулерін келесі түрге келтірейік:

$$\ddot{\varphi}_s + \beta_0(\dot{\varphi}_s - \omega) = \mu_{\omega^2\phi}(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y})(s = 1, 2, \dots, k), \quad (4)$$

$$M\ddot{x} + c\dot{x} = mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \sin \varphi_s + \dot{\varphi}_s^2 \cos \varphi_s) + M_1 z \omega^2 \cos \omega t - \mu_{\beta'x}, \quad (5)$$

$$M\ddot{y} + cy = mR \sum_{s=1}^k (\ddot{\varphi}_s \cos \varphi_s - \dot{\varphi}_s^2 \sin \varphi_s) + M_1 z \omega^2 \sin \omega t - \mu_{\beta'y}, \quad (6)$$

$$\text{мұндағы } \mu_{\phi}(\varphi_s, \ddot{x}, \ddot{y}) = \frac{1}{R\omega^2} (\ddot{x} \sin \varphi_s + \ddot{y} \cos \varphi_s), \mu_{\beta'} = \beta \quad (7)$$

(7) теңдігіндегі $\mu > 0$ шамасын аз параметр деп қарастырамыз.

Жоғарыда атап өткендей бұл жерде (5), (6) және (7) теңдеулерінің шешімдері қызықтырады. Олардың шешімдерін келесі түрде іздейміз:

$$\varphi_s = \omega t + \alpha_s + \mu\psi_s(\omega t), x = x(\omega t), y = y(\omega t), \quad (8)$$

мұндағы φ_s , x және y периоды $2\pi/\omega$ тең уақыт t тәуелді периодты функциялар, ал α_s – тұрақты; Жоғарыда атап өткендей, бастапқы фаза α_s таңдап отырып немесе анықтай отырып,

$x \approx 0$, $y \approx 0$ болуы қызықтыруы мүмкін, яғни өзіндік теңгерілулік орындалады.

Мұндай түрде қарастырылатын мәселе [2] еңбекте қарастырылатын біркелкі айналымға жақындайтын айналмалы қозғалыста болатын құрылымдардың синхронды қозғалысының дербес жағдайы бола алады.

(5), (6) және (7) теңдеулеріне сәйкес тудырма жүйелер $p^2 = \frac{c}{M} \neq \omega^2$ болғанда, келесі шешімдер түрінде болуы мүмкін, яғни:

$$\begin{cases} \varphi_s^0 = \omega t + \alpha_s \\ x^0 = WR[\eta \cos \omega t + \sum_{j=1}^k \cos(\omega t + \alpha_j)] \\ y^0 = -WR[\eta \sin \omega t + \sum_{j=1}^k \sin(\omega t + \alpha_j)] \end{cases} \quad (9)$$

Бұл жердегі белгілеулер:

$$\eta = \frac{M_1 z}{mR}, W = \frac{m}{M_1} \cdot \frac{\omega^2}{p^2 - \omega^2}, p^2 = \frac{c}{M} \quad (10)$$

(8) шешімдер теңдеулерін қанағаттандыратын $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ параметрлер шамаларын анықтайтын негізгі теңдеулерді құрайық. (7) және (9) теңдіктеріне сәйкес ол теңдеулерді келесі R түрде жаза аламыз.

$$P_s(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{\mu\omega^2}{\beta_0} \langle \phi(\varphi_s^0, \ddot{x}^0, \ddot{y}^0) \rangle = \frac{1}{\beta_0 R} \int_0^{2\pi/\omega} (\ddot{x}^0 \cdot \sin \varphi_s^0 + \ddot{y}^0 \cdot \cos \varphi_s^0) dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\omega^2}{\beta_0} W [\eta \sin \alpha_s + \sum_{j=1}^k \sin(\alpha_s - \alpha_j)] = 0 \quad (s=1, 2, \dots, k) \quad (11)$$

Бұл теңдеулер, төмендегі шарттарды қанағаттандыратын $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ қарағанда қажетті шешімдерді береді.

$$\eta + \sum_{j=1}^k \cos \alpha_j = 0, \sum_{j=1}^k \sin \alpha_j = 0 \quad (12)$$

(12) шарттары орындалса, (9) теңдеулеріне сәйкес біліктің тербелісі бірінші жуықтауда болмайды, яғни:

$$x^0(\omega t) = y^0(\omega t) = 0 \quad (13)$$

Олай болса, қарастырып отырған жағдайда, біріншіден қозғалыстың орнықтылық шартының орындалуы, екіншіден қарастырып отырған қозғалыстың орнықтылығымен қатар (11) теңдеулерінің шешімдерін жауап беретін басқада қозғалыстардың орнықтылығы қызықтыруы мүмкін. Сондықтан, (12) шарттарын қанағаттандыратын (11) теңдеулерінің шешімдері негізгі деп, қалған шешімдерді жанама деп атайды [3].

(11) теңдеулерінің шешімдері орнықты болуы төмендегі анықтауыш арқылы құрылған алгебралық теңдеулердің нақты шешімдерінің таңбаларына байланысты

$$\left| \frac{\partial P_s}{\partial \alpha_j} - \delta_{sj} \vartheta c \right| = \vartheta, \quad (s=1,2,\dots,k) \quad (14)$$

мұндағы, δ_{sj} – Кронекер символы.

Енді дискіде екі шарик болатын жағдайды қарастырайық яғни $k=2$ тең болғандағы жағдай. (11) теңдеулер келесі түрде өрнектеледі:

$$P_1(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\beta_0} W[\eta \sin \alpha_1 + \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0 \quad (15)$$

$$P_2(\alpha_1, \alpha_2, \omega) = -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\beta_0} W[\eta \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 - \alpha_2)] = 0$$

Бұл теңдеулерден әртүрлі төрт шешімдер ала аламыз:

- 1) $\alpha_1^{(1)} = \pi - \gamma, \alpha_2^{(1)} = -(\pi - \gamma);$
- 2) $\alpha_1^{(2)} = 0, \alpha_2^{(2)} = 0;$
- 3) $\alpha_1^{(3)} = \pi, \alpha_2^{(3)} = \pi;$
- 4) $\alpha_1^{(4)} = 0, \alpha_2^{(4)} = \pi;$

мұндағы, $\gamma = \arccos\left(\frac{\eta}{2}\right) = \arccos\frac{M_1 z}{2mR}$.

Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау. Жоғарыда келтірілген төрт шешімдердің ішінде біліктің тербелісте болмауын қамтамасыз ететін тек бірінші шешім. Басқаша айтсақ, бірінші шешім негізгі болып, қалған үш шешім жанама шешімдер. Негізгі шешімнің бар болу шарты орындалуы үшін төмендегі теңсіздік орындалуы керек, яғни:

$$\frac{\eta}{2} = \frac{M_1 z}{2mR} < 1$$

Теңсіздік орындалған жағдайда, екі темір шардың біліктің осіне қарағандағы ең үлкен статикалық моменті дискінің сол біліктің осіне қарағандағы статикалық моментіне үлкен екенін көрсетеді.

Темір шарлардың орталары C_1 және C_2 орналасулары, біліктің деформацияға дейінгі ортасы O және деформациядан кейінгі қозғалыс кезіндегі орталары O_1 , сол сияқты дискінің ауырлық ортасы C .

Бұл тұрғызулар $t=0$ уақыт моментіне сәйкес (9) және (16) формулаларына сәйкес тұрғызылды. Ал кез-келген уақыт үшін, дискінің темір шарларын бірге $uO_1 v$ координаттар жүйесінің $\varphi_0 = \omega t$ бұрышына бұрылуына сәйкес келеді.

Енді (16) шешімдерінің орнықтылығын талдауға көшейік. Бұл жағдайда (15) теңдеулерін төмендегідей ықшамдап жазуға болады:

$$x^2 + Ax + B = 0,$$

мұнда (15) теңдеуіне сәйкес:

$$A = -\left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{\omega^2 W}{2\beta_0} [\eta(\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + 2\cos(\alpha_1 - \alpha_2)],$$

$$B = \left(\frac{\partial P_1}{\partial \alpha_1} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial P_1}{\partial \alpha_2} \cdot \frac{\partial P_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} [\eta \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) \cdot \cos(\alpha_1 - \alpha_2)] \quad (19)$$

(16) шешімдеріне жауап беретін, қарастырып отырған қозғалыстардың асимптотикалық орнықтылығы мен бар болуының жеткілікті шарттарын қанағаттандыру үшін келесі теңсіздіктер орындалу керек, яғни:

$$A > 0, B > 0 \quad (20)$$

(16) негізгі шешім үшін, (19) формуласынан A мен B таба аламыз:

$$A = A^{(1)} = \frac{\omega W}{\beta_0} (-\eta \cos \gamma + \cos 2\gamma) = -\frac{\omega^2 W}{\beta_0} \quad (21)$$

$$B = B^{(1)} = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} (\eta \cos \gamma^2 - 2 \cos \gamma \cos 2\gamma) = \left(1 - \frac{\eta^2}{4}\right) \frac{\omega^4 W^2 \eta^2}{4\beta_0^2}$$

(17) теңсіздігіне сәйкес B шамасы барлық кезде қарастырылып отырған шешімнің бар болу аймағында оң болады.

Ал, A шамасына қатысты айтатын болсақ, оның оң болу шарты келесі $W > 0$ теңсіздігіне келтіреді немесе (10) теңдіктеріне сәйкес келесі теңсіздік жаза аламыз:

$$\omega > P = \sqrt{\frac{c}{M}} \quad (22)$$

(16) теңдеуіндегі жанама үш жағдай үшін (19) формуласы бойынша келесі шамаларды ала аламыз:

$$A^{(2)} = \frac{\omega^2 W}{2\beta_0} [\eta(\cos 0^\circ + \cos 0^\circ) + 2 \cos 0] = \frac{\omega^2 W}{2\beta_0} (2\eta + 2) = \frac{\omega^2 W}{\beta_0} (1 + \eta)$$

$$B^{(2)} = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} [\eta \cos 0^\circ \cos 0^\circ + (\cos 0^\circ + \cos 0^\circ) \cos 0^\circ] = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} (\eta + 2)$$

$$A^{(3)} = -\frac{\omega^2 W}{2\beta_0} [\eta(\cos \pi + \cos \pi) + 2 \cos(\pi - \pi)] = \frac{\omega^2 W}{2\beta_0} (-2\eta + 2) = \frac{\omega^2 W}{\beta_0} (1 - \eta)$$

$$B^{(3)} = -\frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} [\eta \cos \pi \cos \pi + (\cos \pi + \cos \pi) \cos \pi] = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} (\eta - 2) \quad (23)$$

$$A^{(4)} = -\frac{\omega^2 W}{2\beta_0} [\eta (\cos 0^\circ + \cos \pi) + 2 \cos(0 - \pi)] = \frac{\omega^2 W}{2\beta_0} (-2) = -\frac{\omega^2 W}{\beta_0}$$

$$B^{(4)} = \frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2} [\eta \cos 0^\circ \cos \pi + (\cos 0 + \cos \pi) \cos(-\pi)] = -\frac{\omega^4 W^2 \eta}{4\beta_0^2}$$

(23) теңдеулері негізінде келесі тұжырымдамаларды жасай аламыз; екінші шешім сынақ аймағына дейінгі жағдайда орнықты, яғни $\omega < p$ жағдайында; үшінші шешім сынақ аймағынан кейінгі жағдайда орнықты, яғни $\omega > p$ болғанда; соңғы төртінші шешім барлық жағдайда орнықсыз екенін орнықсыз екенін көрсетеді. Олай болса, (17) шарт орындалса, негізгі шешім бар болуын қамтамасыз етеді. Ол шешім сынақ аймағынан кейінгі аралықта жалғыз біліктің айналу жылдамдығында ол орнықсыз. Жоғарыда айтылған тұжымдамалар, қарастырылатын автобалансирдың қолдануының тиімді аймағын анықтайды.

Бұл қарастырылған жүйе үшін де бұрыннан белгілі темір шарларсыз дискінің өзіндік теңгерілулердің мәселесінің шешімдерінің нәтижелерінде қолдануға болатынын көреміз[4].

Екі темір шармен қарастырылған автобалансирдің жұмыс істейтінін белгілі болғандықтан, көп теміршарларлы қолданудың қажеттілігі жоқ екенін көрсетеміз. Оның үстіне $k > 2$ болғанда зерттеу күрделеніп кететіні де белгілі.

Сонымен қатар, қарастырылып отырған мәселені шешуі синхронды қозғалыстың орнықтылықтың интегралдық белгісі арқылы шешуге болатынын айта кету керек. Орнықтылықтың интегралдық белгісін қолдануда потенциалдық функцияның ролін Лагранждың функциясы атқара алады. Ол функция толық теңгерілген дисканың білігінің тербелісіне сәйкес келеді. Бұл жағдайда Лагранждың функциясын бастапқы жуықтауда келесі түрде есептеуге болады:

$$D = \lambda^{(I)} = \langle (T^{(I)} - \Pi^{(I)}) \rangle = \langle \frac{1}{2} M [(\dot{x}^0)^2 + (\dot{y}^0)^2] - \frac{1}{2} C [(\dot{x}^0)^2 + (\dot{y}^0)^2] \rangle \quad (24)$$

(9) өрнегін ескере отырып, (24) ортандыру арқылы келесі функцияны аламыз:

$$D = \lambda^{(I)} = -M \frac{m\omega^2 R^2}{M_1} \cdot W \left[\eta \sum_{s=1}^k \cos \alpha_s + \frac{1}{2} \sum_{s=1}^k \sum_{j=1}^k \cos(\alpha_s - \alpha_j) \right] \quad (25)$$

Қорытынды. Орнықтылықтың интегралдық критерііне сәйкес қозғалыстың орнықтылығы D функциясының минимум нүктелеріне сәйкес келеді. Осы шарттардан (9) – негізгі теңдеулерді ала аламыз және оларға сәйкес орнықтылық шарттарын да аламыз.

Сонымен қатар, орнықтылықтың интегралдық критеріінің негізінде қарастырып отырған жүйенің өзіндік теңгерілуінің сынақтық аймақтан кейінгі қорытындыларын шығаруға да болады, яғни (24) теңдеудегі $\Pi^{(I)}$ – потенциалдық энергияны $T^{(I)}$ кинетикалық энергияға қарағанда ескермеуге болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Блехман, И.И. Синхронизация в природе и технике [Текст] / И.И. Блехман. – М.: Наука, 2021. – 440 с.
2. Румянцев, С.А. Динамика переходных процессов и самосинхронизация движения вибрационных машин [Текст] / С.А. Румянцев. – Екатеринбург: УрОРАН, 2003. – 136 с.
3. Блехман, И.И. Вибрационная механика и вибрационная реология [Текст] / И.И. Блехман. – Москва.: Физматлит, 2018. – 865 с.
4. Пиковский, А. Синхронизация. Фундаментальные нелинейные явления [Текст] / А. Пиковский, М. Розенблюм, Ю. Куртис. – М: Техносфера, 2003. – 496 с.

Материал редакцияға 16.02.24 түсті.

А.Т. Жакаш¹, Ә.А. Джакашова¹, А. Есилханқызы¹

¹Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, г.Тараз, Казахстан

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ АВТОБАЛАНСИРА

Аннотация. Движения динамических систем можно объяснить синхронными движениями вращающихся роторов и нескольких маятников. Вращающиеся роторы включают в себя несбалансированные диски с гибким валом и автобалансиры. Существует ряд трудностей при изучении их движений с математической точки зрения. Поэтому создание математической модели таких систем и ее решение является важной задачей.

Ключевые слова: автобалансиры, тороидальная полость, неуравновешенный диск, статический момент, устойчивость, функция Лагранжа.

A.T. Zhakash¹, E.A. Dzhakashova¹, A. Yesilkhankyzy¹

¹M.Kh. Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

MATHEMATICAL MODEL OF AUTOBALANCER MOVEMENT

Abstract. The synchronous motions of rotating rotors and several pendulums can explain the motions of dynamic systems. Rotating rotors include unbalanced flexible shaft discs and auto-balancers. There are a number of difficulties in studying their movements from a mathematical point of view. Therefore, the creation of a mathematical model of such systems and its solution is an important task.

Keywords: auto balancer, toroidal cavity, unbalanced disk, static moment, stability, Lagrange function.

References

1. Blekhman, I.I. Sinkhronizatsiya v prirode i tekhnike [Synchronization in nature and technology]. – Moscow: Science, 2021. – 440 p., [in Russian].
2. Rumyantsev, S.A. Dinamika perekhodnykh protsessov i samosinkhronizatsiya dvizheniya vibratsionnykh mashin [Dynamics of transient processes and self-synchronization of motion of vibration machines]. – Ekaterinburg: Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, 2003. – 136 p., [in Russian].
3. Blekhman, I.I. Vibratsionnaya mekhanika i vibratsionnaya reologiya [Vibration mechanics and vibration rheology]. – Moscow.: Fizmatlit, 2018. – 865 p., [in Russian].
4. Pikovskiy, A., Rozenblyum, M., Kurtis, YU. Sinkhronizatsiya. Fundamental'nyye nelineynyye yavleniya [Synchronization. Fundamental nonlinear phenomena]. – Moscow: Tekhnosfera, 2003. – 496 p., [in Russian].