ҒТАМР 30.15.27

Ә.Т. Жақаш[1] – *негізгі автор*,
Э.А. Джакашова[2], Н. Тлегенова[3]

[1]Техн. ғылым. канд., доцент, [2]Магистр, [3]Магистрант
[1]https://orcid.org/0000-0001-8685-9868 [2]https://orcid.org/0000-0001-8827-0053
[3]https://orcid.org/0009-0006-1586-0849
[1,2,3]М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті,
Тараз қ., Қазақстан Республикасы
[1]zhakash58@mail.ru

https://doi.org/10.55956/WXYR8283

ЕРКІНДІК ДӘРЕЖЕСІ ЖОҒАРЫ СЫЗЫҚТЫ ЖҮЙЕЛЕРДІ ЕРКІН ТЕРБЕЛІСТЕРІНІҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛІ

Аңдатпа. Динамикалық жүйелердің тербелестері негізінен сыртқы және ішкі әсер етуші күштердің негізінде жүйенің еркін және еріксіз тербелістері болып екіге бөлінеді. Негізінен еркіндік дәрежесі бірге тең динамикалық жүйелердің тербелістері жеткілікті зерттелген. Ал, еркіндік дәрежесі жоғары динамикалық жүйелердің тербелістерін математикалық тұрғыда зерттеуде бірқатар қиындықтар бар. Сондықтан мұндай тербелістердің математикалық моделін құру және оны шешу маңызды мәселе болып табылады.

Тірек сөздер. еркіндік дәрежесі, Лагранждың теңдеуі, кинетикалық және потенциалдық энергиялар, жалпылама координаттар, шоғырландырылған массалар, матрицалар.

Жақаш, Ә.Т. Еркіндік дәрежесі жоғары сызықты жүйелерді еркін тербелістерінің математикалық моделі [Мәтін] / Ә.Т. Жақаш, Э.А. Джакашова, Н. Тлегенова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2024. – №1(83). – Б.301-311. https://doi.org/10.55956/WXYR8283

Кіріспе. Егер кедергісіз ортадағы еркіндік дәрежесі жоғары сызықты тербелмелі жүйеге уақытша тәуелді функция түріндегі сыртқы күш әсер етсе, онда мұндай консервативті жүйелер үшін Лагранждың екінші ретті теңдеуін келесі түрде жаза аламыз

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_j} = 0 \qquad (j = 1,2,\dots,s), \tag{1}$$

мұндағы: $Q_j = Q_j(t)$ – таңдап алынған q_j жалпылама координаттар үшін қоздырғыш күштер; Т – жүйенің кинетикалық энергиясы; П – жүйенің потенциалдық энергиясы; $\dot{q}_j$ – жалпылама жылдамдықтар; s – еркіндіктің дәрежелік саны; q_j – жалпылама координаттар.

Біз қарастырып отырған жағдайда, жүйенің кинетикалық және потенциалдық энергиялары төмендегі түрде өрнектеледі

$$T = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{S} a_{jk}\dot{q}_j\,\dot{q}_k \tag{2}$$

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{S} c_{jk}q_j\,q_k \tag{3}$$

мұндағы: $a_{jk} = a_{kj}$ – инерциялық коэффициенттер; $c_{jk} = c_{kj}$ – серпімділік коэффициенттері.

Зерттеу шарттары мен әдістері. Егер жүйенің тепе-теңдік жағдайы орнықты болса, онда бұл жағдайда потенциалдық энергия оқшауланған ең кіші мәнге тең, ал (3) өрнегі оң квадраттық формада анықталған. Ол үшін төмендегі теңсіздіктердің орындалуы қажет және жеткілікті [1].

$$c_{11} > 0\,,\ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0 \tag{4}$$

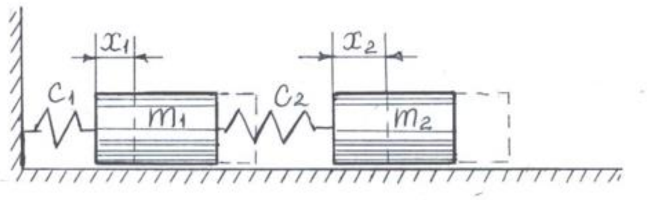
$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} > 0\,, \dots, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

(4) теңсіздіктерін Сильвестр қағидасы деп те атайды. (4) теңсіздіктері орындалған жағдайда, тепе-теңдік күйден шыққан жүйе еркін тербелістер жасайды деп есептеледі.

(2) мен (3) өрнектерді (1) теңдеуге қою арқылы тұрақты коэффициентті біртекті сызықты дифференциалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$a_{j1}\ddot{q_1} + a_{j2}\ddot{q_2} + \dots + a_{js}\ddot{q_s} + c_{j1}q_1 + c_{j2}q_2 + \dots + c_{js}q_s = 0 \tag{5}$$
$$(j = 1,2, \dots, s).$$

Мысал ретінде, еркіндік дәрежесі екіге тең жүйені қарастырайық, яғни массалары m_1 және m_2 тең денелер екі серіппелермен жалғансын. Серіппелердің қатаңдықтары c_1 және c_2 тең (1-сурет).



Сурет 1. Еркіндік дәрежесі екіге тең жүйе

Жалпылама координаттар ретінде жүктердің орын ауыстырулары x_1 пен x_2 қабылдайық. Санақ жүйесі ретінде бастапқы тепе теңдік жағдайды аламыз. Бірінші серіппе бұл кезде деформацияланбаған күйде болады. Қозғалыс кезінде серіппелердің ұзарулары $\Delta l_1 = x_1$, $\Delta l_2 = x_2 - x_1$.

Жүйе қозғалысының математикалық моделін құру үшін жоғарыда айтылған Лагранждың екінші ретті теңдеуін қолданамыз. Ол үшін денелердің кинетикалық және потенциалдық энергияларын тауып алайық.

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2} \qquad (6)$$

$$\text{п} = \frac{c_1\, x_1^2}{2} + \frac{c_2(x_2 - x_1)^2}{2} \qquad (7)$$

Енді осы энергияларды (1) теңдеуіне қою үшін олардың дербес дифференциалдары мен толық дифференциалдарын тауып аламыз.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = (\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2})'_{\dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = (\frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2})'_{\dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1\ , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_2\ddot{x}_2$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_1} = \ c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1), \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x_2} = c_2(x_2 - x_1)$$

Осы табылған өрнектерді (1) теңдеуіне қойсақ, келесі дифференциалдық теңдеулерді аламыз.

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0$$

$$m_2\ddot{x}_2 = c_2(x_2 - x_1) = 0 \qquad (8)$$

Кейбір жағдайларда, яғни жүйенің еркіндік дәрежесі төмендеу болса, олардың қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін басқа да әдістермен алуға болады.

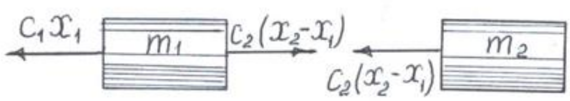
Бірінші әдіс бойынша жүйеден шоғырландырылған массаларды жекелей аламыз да, оларды таңдап алынған жалпылама координаттар арқылы өрнектелетін күштер әсеріндегі еркін материалдық нүктелер деп қарастырамыз.

Сол күш әсеріндегі материалдық нүктелер қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін құрастырамыз.

Ал, екінші әдіс бойынша шоғырландырылған массаларды бөліп алғаннан кейін, массасыз жүйені қарастырып, кинетикалық реакциялармен алмастырамыз, және бұл кинетикалық реакциялар жалпылама теңдеулер арқылы өрнектеледі. Содан соң, қаңқа түріндегі жүйенің орын ауыстыруын статикалық қатынастармен өрнектейміз.

Енді осы екі әдісімізді жоғарыдағы екі мысалымызға қолданып көрейік.

Бірінші әдісіміз бойынша серпімді күштер әсеріндегі денелерден қарастырайық. Бұл серпімді күштер серіппелердің Δl_1 және Δl_2 ұзаруларымен анықталады (2- сурет).



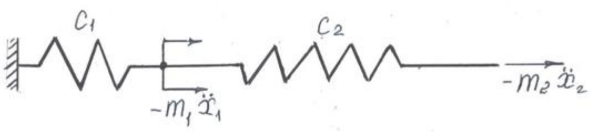
Сурет 2. Серпімді күштер әсеріндегі денелер

$N_1 = c_1 \cdot \Delta l_1 = c_1\, x_1$
$N_2 = c_2 \cdot \Delta l_2 = c_2\, (x_2 - x_1)$

Онда денелер қозғалысының дифференциалдық теңдеулерін келесі түрде өрнектей аламыз

$m_1\ddot{x}_1 = -N_1 + N_2 = -c_1\, x_1 + c_2\, (x_2 - x_1)$
$m_2\ddot{x}_2 = -N_2 = -c_2\, (x_2 - x_1)$
Немесе
$m_1\ddot{x}_1 + c_1\, x_1 - c_2\, (x_2 - x_1) = 0$
$m_2\ddot{x}_2 + c_2\, (x_2 - x_1) = 0$

Екінші әдіс бойынша денелерді бөлектеп алып, оларды $-m_1\ddot{x}_1$ және $-m_2\ddot{x}_2$ кинетикалық реакциялар немесе инерциялық күштер әсеріндегі серпімді массасыз қаңқаны қарастырайық. Мұндай жағдайда бірінші серіппе $-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2$ күштерімен, ал екінші серіппе -$m_2\ddot{x}_2$ күштер әсерінде болады (3-сурет).



Сурет 3. Жүйенің массасыз қаңқасы

Бірінші серіппе ұшының орын ауыстыруын x_1 деп белгілесек, оның шамасын келесі түрде есептейміз

$$x_1 = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1} \tag{9}$$

Екінші серіппе ұшының орын ауыстыруы x_2 екі серіппенің ұзаруының қосындысына тең.

$$x_2 = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1} + \frac{-m_2\ddot{x}_2}{c_2} \tag{10}$$

(9) және (10) қатынастарынан келесі теңдеулерді аламыз

$$m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 + c_1\, x_1 = 0 \tag{11}$$

$$x_2 + \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1}; \qquad \frac{c_2x_2 - m_2\ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1}$$

$$c_2x_2 + m_2\ddot{x}_2 = \frac{c_2}{c_1}(-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2)$$

$$\frac{c_2}{c_1}m_1\ddot{x}_1 + \frac{c_2}{c_1}m_2\ddot{x}_2 + m_2\ddot{x}_2 + c_2x_2 = 0$$

$$\frac{c_2}{c_1}m_1\ddot{x}_1 + (\frac{c_2}{c_1} + 1)\ddot{x}_2 + c_2x_2 = 0 \tag{12}$$

Сонымен, бірінші және екінші әдістермен алынған нәтижелер бірдей болды, себебі таңдалған жалпылама координаттарда кинетикалық энергия келесі канондық формада жазылады [2]:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S} a_j\,\dot{q}_j^2 \tag{13}$$

Яғни j≠k болғанда, жылдамдықтар көбейтіндісінде анықталған. Бұл жағдайда, Лагранждың әрбір теңдеулері тек бір ғана жалпылама үдеуді қамтиды, яғни бірінші әдістегі сияқты. Ал егер, жалпылама координаттарды таңдаған болсақ, онда потенциалдық энергияны келесі канондық формада жазар едік:

$$\Pi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{S} c_j\,q_j^2 \tag{14}$$

Онда Лагранждың теңдеулері, екінші әдіспен алынған дифференциалдық теңдеулермен бірдей болар еді. Осы тұжырымдамалар негізінде дифференциалдық теңдеулердің құрылымы туралы келесі қорытындыларға келуге болады: бірінші тура әдіспен құрылатын теңдеулер жүйесінде i≠j болса, онда $a_{ij} = 0$, ал екінші кері әдіспен құру кезінде i≠j болмаса $\mathrm{c}_{ij} = 0$. Олай болса, бірінші тура әдісті қолданатын болсақ (5) дифференциалдық теңдеулер жүйесін еркіндік дәрежесі жоғары жүйелердің еркін тербелісінің дифференциалдық теңдеулер жүйесі келесі түрде өрнектеледі

$$a_j\ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{S} c_{jk}\,q_k = 0. \tag{15}$$

Ал, екінші кері әдісті қолданатын болсақ, (5) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз

$$\sum_{k=1}^{S} a_{ij}\,\ddot{q}_k + c_j q_j = 0. \tag{16}$$

(15) және (16) түріндегі жазылу варианттары арасындағы байланысты сызықты жүйедегі статикалық орын ауыстыруларды анықтайтын келесі іргелі қатынастан көруге болады, яғни

$$q_j = \sum_{k=1}^{S} \delta_{jk}\,F_k \qquad (j = 1,2,\dots,s) \tag{17}$$

мұндағы δ_{jk} – орын ауыстырулардағы әсер ететін коэффициенттер (17) қатынастарын ыңғайлы болуы үшін матрица формасында жазуға болады.

$$(q) = (\delta)\cdot F \tag{18}$$

мұндағы $(q) = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_s \end{pmatrix}$ - жалпылама координаттарды өрнектейтін тік матрица.

$$(q) = \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1s} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \delta_{s1} & \delta_{s2} & \cdots & \delta_{ss} \end{pmatrix} \tag{19}$$

(19) - орын ауыстырулардың әсер етуші коэффициенттерінің матрицасы.

$$F=\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_s \end{pmatrix} \qquad (20)$$

(20) - жалпылама күштер матрицасы.

(16) мен (δ) матрицасының кері матрицасын кіргіземіз

$$(\delta)^{-1} = (r) = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1s} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \cdots & r_{ss} \end{pmatrix} \qquad (21)$$

(18) матрицасын (21) матрицаларын көбейтейік

$$(r) \cdot (\,q) = (F) \qquad (22)$$

(21) матрицасын r_{jk} элементтерінің физикалық мағынасын түсіндіріп көрейік. Жүйенің барлық нүктелеріне қосымша байланыстар түсірілсін. Бұл байланыстар q_k басқа орын ауыстырудың жалпылама координаттарын нөлге айналдырады. Онда r_{jk} элементтері j-ші қосымша байланыстардың реакциялық күштерін білдіреді және ол $q_k = 1$ орын ауыстыруына сәйкес келеді. Механикада r_{jk} шамаларын бірлік реакциялар деп айтады.

(22) қатынастарынан бірінші тура әдіс бойынша алынатын дифференциалдық теңдеулер шығады, ал (18) қатынастарынан екінші кері әдіспен табылатын дифференциалдық теңдеулерді аламыз. Еркін тербелістер есептерінде $F_j = -m_j \ddot{q}_j$, егер диагоналды матрицаны кіргізсек:

$$(m) = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_s \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Онда келесі теңдеуді жаза аламыз:

$$(F) = -(m)(\ddot{q}) \qquad (24)$$

(24) қатынасты (22) қойып келесі матрицалық қатынастарды аламыз:

$$(r) \cdot (\,q) = -(m)(\ddot{q}) \qquad (25)$$

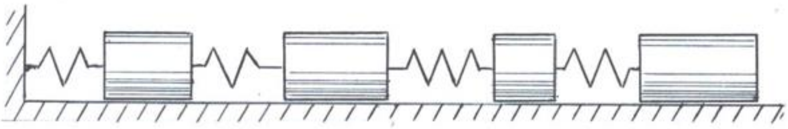
Яғни (25) матрицасын (15) дифференциалдық теңдеулер жүйесінде бере аламыз.

(24) матрицасын (18) матрицасына қою арқылы келесі матрицаны аламыз:

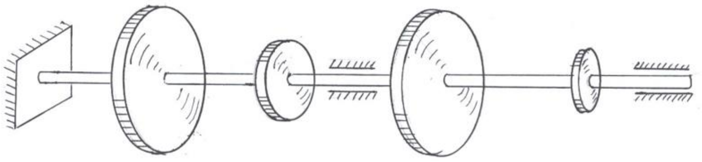
$$(\,q) = -(\delta) \cdot (m)(\ddot{q}) \qquad (26)$$

(25) матрицасынан (16) түріндегі дифференциалдық теңдеулер жүйесін ала аламыз.

Зерттеу нәтижелері және оларды талқылау. Жалпы, бірінші әдісті тізбектеле берілетін құрылымдар жүйесі үшін ыңғайлы екенін айта кетуіміз керек, себебі мұндай жүйелерде серпімді күштерде екі көрші денелердің орын ауыстыруымен өрнектеу ыңғайлы. Осы айтылған тұжырымдамаға сәйкес келесі мысалдарды қарастырайық. 4-суретте жалпылама координаттары q_j тең горизонталь бойынша қозғалыстар жасайтын j-ші денелердің сұлбасы берілген. Ал 5-суретте айналмалы қозғалыс жасайтын j-ші денелердің сұлбасы ұсынылған.



Сурет 4. Горизонталь бойынша қозғалатын жүйенің сұлбасы



Сурет 5. Айналмалы қозғалыс жасайтын денелердің сұлбасы

Бұл жағдайда горизонталь қозғалыстағы денелерге әсер ететін серпімді күштердің, ал айналмалы қозғалыс жасайтын дискілерге әсер ететін серпімді моменттердің қосындысын төмендегі бір формадағы теңдеулермен көрсетуге болады:

$$-c_j\,(q_j - q_{j-1}) + c_{j+1}\,(q_{j+1} - q_j) = F_j \tag{27}$$

мұндағы: c_j, j-1 және j денелер арасындағы серпімді байланыстардың қатаңдығы; c_{j+1}, j-1 және j денелер арасындағы серпімді байланыстардың қатаңдығы. Онда j-ші дененің қозғалысының дифференциалдық теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$m_j\ddot{q}_j = -c_j\,(q_j - q_{j-1}) + c_{j+1}\,(q_{j+1} - q_j) \tag{28}$$

(28) дифференциалдық теңдеудің (15) теңдеуіне сәйкес келетінін көреміз. Тура осылай j-ші дененің айналмалы қозғалысы үшін дифференциалдық теңдеуді аламыз. Айырмашылығы m_j инерциялық коэффициенті I_j инерциялық моментпен алмастырсақ болады.

Бұл жерде айта кетуіміз керек, (28) теңдеулерінің әрқайсысы үш белгісіз функциялардан тұрады, ал шеткі денелер үшін екі белгісіз функциялардан тұрады.

Сонымен қатар, теңдеулердің коэффициенттері есептің бастапқы шамалары арқылы оңай есептеуге болатынын айта кетуіміз керек. Мұндай жүйелер үшін екінші кері әдісті қолдану күрделі теңдеулерге әкелуі мүмкін, себебі жүйенің сол жақ бұрышынан алыстаған сайын дифференциалдық теңдеулердегі белгісіз функциялар саны өсіп отырады және соңғы теңдеу барлық q_j функциясын қамтитын болады. Сондықтан бұл жағдайда тура әдісті пайдаланғанмыз дұрыс [3].

Ал, шоғырланған массалы арқалықты жүйелер үшін (6 а-сурет) екінші кері әдісті қолданған дұрыс, себебі ол кинетостатикалық схемаға әкеледі (6 б-сурет). Бұл жағдайда δ_{jk} әсер ету коэффициенттерін пайдаланып (16) түріндегі теңдеулерге әкеле аламыз:

$$y_j = -m_1\ddot{y}_1\,\delta_{j1} - m_2\ddot{y}_2\,\delta_{j2} - \cdots - m_s\ddot{y}_s\,\delta_{js} \qquad (j = 1,2,\ldots,s). \tag{29}$$

(29) теңдеуі (26) матрица түріндегі теңдеуге сәйкес келетінін көреміз. Кері әдістерді көп жағдайда құрылыс механикасында көп қолданады [2].

Егер жоғарыда қарастырылған тепе-теңдектің орнықтылық шарттары (4) орындалса онда (29) дифференциалдық теңдеулер жүйесінің дербес шешімдерін келесі түрде жаза аламыз

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1\sin(kt+\alpha) \\ q_2 &= A_2\sin(kt+\alpha) \\ q_s &= A_s\sin(kt+\alpha) \end{aligned} \tag{30}$$

Осы өрнектермен жалпы, барлық q_j- координаталар үшін жиілігі k тең гармоникалық тербелістер шешімдері жазылады.

(30) өрнектерін (29) дифференциалдық теңдеулеріне қойып, келесі алгебралық теңдеулерді аламыз

$$\begin{aligned} &-k^2a_{11}A_1 - k^2a_{12}A_2 + \cdots + k^2a_{1s}A_s + c_{11}A_{11} + c_{12}A_2 + \cdots + a_{1s}A_s \\ &= 0, \\ &-k^2a_{21}A_1 - k^2a_{22}A_2 + \cdots + k^2a_{2s}A_s + c_{21}A_1 + c_{22}A_2 + \cdots + a_{2s}A_s \\ &= 0, \\ &-k^2a_{s1}A_1 - k^2a_{2s}A_2 + \cdots + k^2a_{ss}A_s + c_{s1}A_{11} + c_{s2}A_2 + \cdots + a_{ss}A_s = 0. \end{aligned} \tag{31}$$

Бұл алгебралық теңдеулер жүйесі белгісіз амплитудаларға қарағанда біртекті.

Тербеліс кезінде олардың бәрі нөлге тең болу мүмкін емес, сондықтан біртекті жүйелердің жалпы қасиеттеріне сәйкес жүйенің коэффициенттерінен құрылған анықтауыш нөлге тең болуы тиіс [1]:

$$\begin{vmatrix} c_{11} - a_{11}k^2 & c_{12} - a_{12}k^2 & \ldots & c_{1s} - a_{1s}k^2 \\ c_{21} - a_{21}k^2 & c_{22} - a_{22}k^2 & \ldots & c_{2s} - a_{2s}k^2 \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots & & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ c_{s1} - a_{s1}k^2 & c_{s2} - a_{s2}k^2 & \ldots. & c_{ss} - a_{ss}k^2 \end{vmatrix} = 0 \tag{32}$$

Егер анықтауышты ашатын болсақ k^2 қарағандағы $s-$ ші дәрежелі алгебралық теңдеуді аламыз. Оның жиіліктік теңдеуін келесі түрде жазамыз

$$b_0 - b_1k^2 + b_2k^4 - b_3k^6 + \cdots + (-1)^s b_s k^{2s} = 0 \tag{33}$$

Бұл жиіліктік теңдеудің түбірлерінің $s -$ ке тең және оларды өсуіне қарай $k_1^2,\ k_2^2 , \ldots ,\ k_s^2$ деп белгілейді. Қарастырып отырған жүйе үшін оның барлық түбірлері нақты және оң. Олай болса k жиілігі үшін s шама табылады, және олар өспелі, яғни

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_s \qquad (34)$$

Әрбір k_j түбірге (30) түріндегі дербес шешім сәйкес келеді, олай болса жалпы шешімдер осылардың шешімдерінің қосындысына тең:

$$\begin{gathered}
q_1 = \ A_{11}\sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12}\sin(k_2 t + \alpha_2) + \cdots + \ A_{1s}\sin(k_s t + \alpha_s), \\
q_1 = \ A_{21}\sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{22}\sin(k_2 t + \alpha_2) + \cdots + \ A_{2s}\sin(k_s t + \alpha_s), \\
q_s = \ A_{s1}\sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{s2}\sin(k_2 t + \alpha_2) + \cdots + \ A_{ss}\sin(k_s t + \alpha_s),
\end{gathered}$$

Мұнда А әріпіне екі индекс жазылған: біріншісі координаттың номерін, ал екіншісі меншікті жиіліктің номерін көрсетеді. (32) анықтауыштың шешімін ықшамдап, келесі түрде жаза аламыз.

$$q_J = \sum_{j=1}^{S} A_{ij} q_j \sin(k_i t + \alpha_i) \qquad (\mathrm{j} = 1{,}2, . . , \mathrm{s}) \qquad (35)$$

Еркіндік дәрежесі екіге тең жүйені қарастырайық және олардың жиіліктері өзара жақын дейік, яғни $k_1 \approx k_2$. Онда, мысалы бірінші жалпылама координат үшін келесі теңдікті аламыз.

$$q_1 = \ A_{11}\sin(k_1 t + \alpha_1) + A_{12}\sin(k_2 t + \alpha_2) \qquad (36)$$

Егер келесі белгілеулерді енгізсек

$$\frac{1}{2}(\ A_{11}\cos\alpha_1 \pm A_{12}\cos\alpha_2) = \ B_{1,2} \qquad (37)$$

$$\frac{1}{2}(\ A_{11}\sin\alpha_1 \pm A_{12}\sin\alpha_2) = \ B_{3,4}$$

Онда (36) теңдеудің орнына келесі теңдікті жаза аламыз.

$$\begin{gathered}
q_1 = \\
B_1\,(\sin k_1 t + \sin k_2 t) + B_2\,(\sin k_1 t - \sin k_2 t) + B_3\,(\cos k_1 t + \cos k_2 t) + \\
+ B_4\,(\cos k_1 t - \cos k_2 t) \qquad (38)
\end{gathered}$$

(38) теңдіктегі екі тригонометриялық функциялардың қосындысы мен айырмасын көбейтінді түрінде жазатын болсақ, келесі өрнекті аламыз

$$q_1 = 2B_1 \sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t + 2B_2 \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t \cdot \qquad (39)$$

$$\cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)t + 2B_3 \cos\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)t \cdot \cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t - 2B_4 \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t \cdot \sin\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t$$

Бұл жерде көрініп тұрғандай $\left(\frac{k_1-k_2}{2}\right)t$ аргументіндегі функция $\left(\frac{k_1+k_2}{2}\right)t$ аргументінде функцияға қарағанда жәй өзгеретінін көреміз. Сондықтан (39) теңдеуін келесі түрде жазсақ ыңғайлы болар еді.

$$q_1 = D_1 sinkt + D_1 coskt, \tag{40}$$

мұндағы $k = \frac{k_1+k_2}{2}$ - k_1 және k_2 жиіліктерінің орташа шамасы,

$$D_1 = 2(B_1 \cos\frac{k_1-k_2}{2}t - B_4 \sin\frac{k_1-k_2}{2}t)$$

Қорытынды. Тербелестердің жиіліктік теңдеуінің түбірлері $s -$ ке тең және олар өспелі. Қарастырып отырған жүйе үшін оның барлық түбірлері нақты және оң. Олай болса k жиілігі үшін s шама табылады, және олар келесі түрде өрнектеледі

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots < k_s.$$

Олай болса, әрбір жалпылама координат полигармоникалық заң бойынша өзгеретінін көреміз және гармоникалық жасаушылар жүйенің еркіндік дәрежесіне тең.

Әдебиеттер тізімі

1. Стрельков, С.П. Введение в теорию колебаний [Текст]: учебник / С.П. Стрельков – СПб.: Лань, 2021. – 440 с.
2. Бабаков, И.М. Теория колебаний [Текст]: учеб. пособие для вузов / И.М. Бабаков. – М.: Наука, 2011. – 591 с.
3. Ланда, П.С. Нелинейные колебания и волны [Текст] / П.С. Ланда. – М.: Либроком, 2019. – 552 с.

Материал редакцияға 16.02.24 түсті.

А.Т. Жакаш[1], Э.А. Джакашова[1], Н. Тлегенова[1]

[1]Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, г.Тараз, Казахстан

СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ВЫСШИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Аннотация. Колебания динамических систем по признаку действия внешних и внутренних сил в основном разделяют на два вида: свободные и непроизвольные колебания системы. В принципе, колебания динамических систем с равными степенями свободы достаточно изучены. Но существует ряд трудностей при математическом исследовании колебаний динамических систем с высокой степенью свободы. Поэтому создание математической модели таких колебаний и ее решение является важной задачей.

Ключевые слова: степени свободы, уравнение Лагранжа, кинетическая и потенциальная энергии, обобщенные координаты, концентрированные массы, матрицы.

A.T. Zhakash[1], E.A. Dzhakashova[1], N. Tlegenova[1]

[1]Taraz Regional University named after. M.H. Dulati, Taraz, Kazakhstan

FREE VIBRATIONS OF LINEAR SYSTEMS WITH HIGHER DEGREES OF FREEDOM

Abstract. Vibrations of dynamic systems based on the action of external and internal forces are mainly divided into two types: free and involuntary oscillations of the system. In principle, vibrations of dynamic systems with equal degrees of freedom have been sufficiently studied. There are a number of difficulties in the mathematical study of oscillations of dynamic systems with a high degree of freedom. Therefore, creating a mathematical model of such oscillations and solving it is an important issue.

Keywords: degrees of freedom, Lagrange equation, kinetic and potential energies, generalized coordinates, concentrated masses, matrices.

References

1. Strel'kov S.P. Vvedeniye v teoriyu kolebaniy [Introduction to the theory of oscillations]. – St. Petersburg: Len, 2021. – 440 p. [in Russian].
2. Babakov I.M. Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]. - Moscow: Science, 2011. – 591 p. [in Russian].
3. Landa P.S. Nelineynyye kolebaniya i volny [Nonlinear oscillations and waves]. - Moscow: Librocom, 2019. – 552 p. [in Russian].