ҒТАМР 30.51.27

С.У. Айсаев[1] – *негізгі автор,*
Л.Д. Диярова[2]

[1]Техн. ғылым. канд., профессор, [2]Техн. ғылым. канд., доцент

ORCID *[1]https://orcid.org/0009-0000-5037-5669 [2]https://orcid.org/0000-0002-4563-1098*

[1,2]Ш. Есенов атындағы Каспий технологиялар және инжиниринг университеті,

Ақтау қ., Қазақстан Республикасы

@ *[1]a.satzan@@mail.ru*

https://doi.org/10.55956/WSCS5088

ЕКІ ӨЛШЕМДІ ЖЫЛУ ТАРАЛУ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ШЕКТІК ЕСЕПТЕР

Аңдатпа. Жылу алмасудың техникадағы да, табиғаттағы да маңызы денелердің физикалық-химиялық қасиеттері негізінде температураға, яғни жылулық күйіне байланысты. Жылулық күй жылу алмасудың шарттарымен анықталады, сол үшін олар заттың агрегаттық күйінің өзгеру үрдістеріне, химиялық реакциялардың өтуіне, денелердің механикалық, электризоляциялық, магниттік және басқа да қасиеттеріне шешуші ықпал етеді. Осы тұрғыдан алғанда, қарастырып отырған мәселе маңызды болып табылады.

Тірек сөздер: жылу таралу, минималдау, конвективтік жылу алмасу.

Айсаев, С.У. Екі өлшемді жылу таралу теңдеуі үшін шектік есептер [Мәтін] / С.У. Айсаев, Л.Д. Диярова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2024. – №1(83). – Б.254-260. https://doi.org/10.55956/WSCS5088

Кіріспе. Екі өлшемді болып келетін біртұтас жүйедегі жылудың өткізгіштік процесінің математикалық моделі төмендегі теңдеумен өрнектеледі [1]:

$$K_{xx}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+K_{yy}\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+Q=0 \tag{1}$$

(1)-ші дифференциалды теңдеумен қоса шектік шарттарды талдайық. Шектік шартта жүйенің температурасы берілсе, онда ол келесі теңдеумен беріледі:

$$T=T_B(s). \tag{2}$$

Зерттеу шарттары мен әдістері. Егер жүйенің бір жағына $h(T-T_\infty)$ әсер етіп, ал екінші жағы q жылыту әсерін тигізсе, онда шектік шарт келесі түрде жазылады:

$$K_{xx}\frac{\partial T}{\partial x}l_x+K_{yy}\frac{\partial T}{\partial y}l_y+h(T-T_\infty)+q=0\,. \qquad (3)$$

Шекаралық (2) және (3) шарттарын ескеріп (1)-ші дербес дифференциалдық теңдеуді келесі әдіспен шешіп, оның ең кіші мәнін таба аламыз:

$$\chi=\int_V\frac{1}{2}\left[K_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2+K_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2-2QT\right]dV+\int_S\left[qT+\frac{1}{2}h\left(T-T_\infty\right)\right]dS \qquad (4)$$

Минималдау процесі (4)-ші теңдеу арқылы басталып, келесі матрицамен анықталады [1]:

$$\{g\}^T=\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x} & \frac{\partial T}{\partial y}\end{bmatrix} \qquad (5)$$

және

$$[D]=\begin{bmatrix}K_{xx} & 0\\ 0 & K_{yy}\end{bmatrix}. \qquad (6)$$

(4)-ші қатынас енді былайша жазылады:

$$\chi=\int_V\frac{1}{2}\left[\{g\}^T[D]\{g\}-2QT\right]dV+\int_{S_1}qTdS+\int_{S_2}\frac{h}{2}\left[T^2-2TT_\infty+T_\infty^2\right]dS\,\cdot \qquad (7)$$

Енді жоғарыдағы интегралдық қосындылар анықталатын интегралдарға бөлініп тасталады [2]:

$$\chi=\sum_{e=1}^{E}\int_{V^{(e)}}\frac{1}{2}\left[\{g^{(e)}\}^T\left[D^{(e)}\right]\{g^{(e)}\}-2Q^{(e)}T^{(e)}\right]dV+\int_{S_1^{(e)}}q^{(e)}T^{(e)}dS+$$
$$+\int_{S_2^{(e)}}\frac{h^{(e)}}{2}\left[T^{(e)}T^{(e)}-2T^{(e)}T_\infty+T_\infty^2\right]dS\,\cdot \qquad (8)$$

(8)-ші теңдеудің сол жағы жоғарыда қарастырылған функцияға қатысты. Олай болса, келесі шартты жаза аламыз:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\{T\}}=\frac{\partial}{\partial\{T\}}\sum_{e=1}^{E}\chi^{(e)}=\sum_{e=1}^{E}\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{T\}}=0\,. \qquad (9)$$

$\{g^{(e)}\}$ үшін келесі өрнек жазылады:

$$\{g^{(e)}\}=\left[B^{(e)}\right]\{T\},\quad \{g^{(e)}\}^T=\{T\}^T\left[B^{(e)}\right]^T. \qquad (10)$$

Бұл жерде

$$[B]=\frac{1}{2A^{(e)}}\begin{bmatrix}b_i^{(e)} & b_j^{(e)} & b_k^{(e)}\\ c_i^{(e)} & c_j^{(e)} & c_k^{(e)}\end{bmatrix}. \qquad (11)$$

(7) және (9) өрнектерін пайдаланып, (8) теңдеудегі интегралдық қосындыларды келесі түрде жаза аламыз [2]:

$$\chi^{(e)} = \int_{V^{(e)}} \frac{1}{2}\{T^T\}[B^{(e)}]^T[D^{(e)}][B^{(e)}]\{T\}dV - \int_{V^{(e)}} Q[N^{(e)}]\{T\}dV + \int_{S_1^{(e)}} q[N^{(e)}]\{T\}dS +$$
$$+ \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2}\{T\}^T[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{T\}dS - \int_{S_2^{(e)}} hT_\infty[N^{(e)}]\{T\}dS + \int_{S_2^{(e)}} \frac{h}{2}T_\infty^2 dS \cdot \quad (12)$$

Соңғы интегралдар жинағы ықшамдап жазылса:

$$\frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial\{T\}} = [k^{(e)}]\{T\} + \{f^{(e)}\}. \quad (13)$$

Сызықтық алгебралық теңдеулердің негізгі жүйесі (5)-ші өрнекті (9)-ші теңдеуге қойғаннан кейін алынады:

$$\frac{\partial\chi}{\partial\{T\}} = \sum_{e=1}^{E}\left([k^{(e)}]\{T\} + \{f^{(e)}\}\right) = 0,$$

немесе

$$[K]\{T\} = \{F\}.$$

бұл жерде:

$$[K] = \sum_{e=1}^{E}[k^{(e)}] = \sum_{e=1}^{E}\left[[k0^{(e)}] + [k1^{(e)}]\right]$$

және

$$\{F\} = -\sum_{e=1}^{E}\{f^{(e)}\} = -\sum_{e=1}^{E}\left\{\{f1^{(e)}\} + \{f2^{(e)}\} + \{f3^{(e)}\}\right\}.$$

мұндағы $[k1^{(e)}]$-ді келесі түрде өрнектей аламыз:

$$[k1^{(e)}] = \int_{S_2^{(e)}} h[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]dS.$$

Жылу $(i,\ j)$ көлбеу қыр арқылы қозғалса, онда келесі интегралды аламыз:

$$\int_{S_2^{(e)}} h[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]dS \quad (14)$$

Қарама-қарсы көбейтінділерді интегралдайық:

$$\int_{\tilde{L}_{ij}} L_1^1 L_2^1 d\tilde{L} = \int_{\tilde{L}_{ij}} L_2^1 L_1^1 d\tilde{L} = \frac{1!1!}{(1+1+1)!}\tilde{L}_{ij} = \frac{\tilde{L}_{ij}}{6}. \quad (15)$$

Жылу ағынының әсері көлбеу қырында өтетін болса, онда:

$$\int_{S_1}[N]^T\,dS=\int_S\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\\N_k\end{Bmatrix}dS=\int_{\tilde{L}_{ij}}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}d\tilde{L}=\frac{\tilde{L}_{ij}}{2}\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix} \qquad (16)$$

екенін дәлелдеу қиын емес.

$$\int_{S_1}[N]^T\,dS=\int_S\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\\N_k\end{Bmatrix}dS=\int_{\tilde{L}_{jk}}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}d\tilde{L}=\frac{\tilde{L}_{jk}}{2}\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix} \qquad (17)$$

ал (i,k) қыры үшін

$$\int_{S_1}[N]^T\,dS=\int_S\begin{Bmatrix}N_i\\N_j\\N_k\end{Bmatrix}dS=\int_{\tilde{L}_{ik}}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}d\tilde{L}=\frac{\tilde{L}_{ik}}{2}\begin{Bmatrix}1\\0\\1\end{Bmatrix} \qquad (18)$$

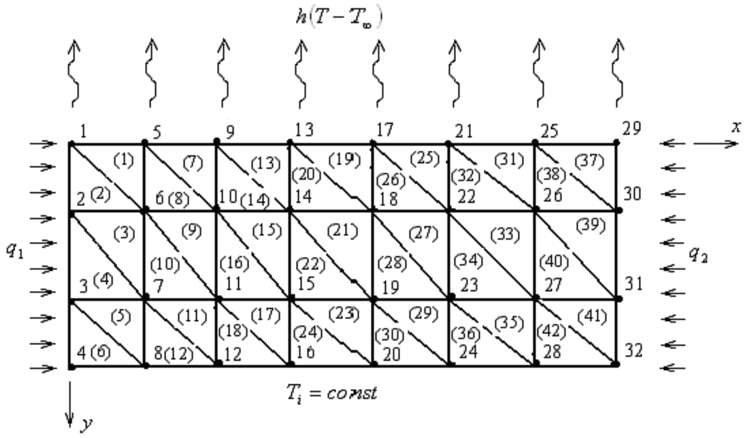
болады.

Мұндай мәселелерде температураның градиентін анықтау қажет болады. Ол үшін келесі өрнек қолданылады:

$$\left\{\frac{\partial T}{\partial x}\right\}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_i & b_j & b_k\\ c_i & c_j & c_k\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}T_i\\T_j\\T_k\end{Bmatrix}. \qquad (19)$$

Жылулық жүктеме векторындағы үлесі элементтері жоғарыдағы қисық сызықты интегралмен есептелінеді.

Мысал ретінде төмендегі сұлбаны қарастырайық (1-сурет) [3].



Сурет 1. Қарастырылатын аймаққа тығыздығы q_1 және q_2 болатын жылу ағындарының әсері

Қарастырылатын аймаққа тығыздығы q_1 және q_2 болатын жылу ағындары әсер етеді. Төртбұрышты аймақтың жоғарғы горизонталь бетінде қоршаған ортамен $h(T - T_\infty)$ заңдылығы арқылы орындалады. 1-суретте (i, k) қабырғасында жылу бар болса, (j, k) қабырғасына тығыздығы q_2 жылу ағыны әсер етеді. Қажетті параметрлерге нақты шамаларды қарастырайық:

$$K_{xx} = 3\,kBm/(м \cdot {}^0C), \qquad h = 50\,kBm/(м^2 \cdot {}^0C), \qquad T_\infty = 40\,{}^0C,$$
$$q_1 = q_2 = -150\,kBm/(м^2),\ T_i = 10\,{}^0C,\ (i = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32).$$

Аймақтың түйіндерінің x және y координаталарының өзгеру қадамдарын тұрақты және өзара тең деп алайық:

$\Delta x = 1$м және $\Delta y = 1$.

Зерттеу нәтижелері және ғылыми нәтижелерді талқылау. Жоғарыдағы шамаларды ескере отырып, $\left[k0^{(37)}\right]$ және $\left[k1^{(37)}\right]$ мәндерін табайық.

$$\left[k0^{(37)}\right] = \frac{K_{xx}}{4A}\begin{bmatrix} b_ib_i & b_ib_j & b_ib_k \\ b_jb_i & b_jb_j & b_jb_k \\ b_kb_i & b_kb_j & b_kb_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A}\begin{bmatrix} c_ic_i & c_ic_j & c_ic_k \\ c_jc_i & c_jc_j & c_jc_k \\ c_kc_i & c_kc_j & c_kc_k \end{bmatrix} \qquad (20)$$

мұндағы b және c шамалары былайша анықталады:

$$b_i = Y_j - Y_k = 1 - 0 = 1,$$
$$b_j = Y_k - Y_i = 0 - 0 = 0,$$
$$b_k = Y_i - Y_j = 0 - 1 = -1,$$
$$c_i = X_k - X_j = 7 - 7 = 0,$$
$$c_j = X_i - X_k = 6 - 7 = -1,$$
$$c_k = X_j - X_i = 7 - 6 = 1.$$

Суреттегі келтірілген ауданды табайық:

$$2A = \begin{vmatrix} 1 & X_i & Y_i \\ 1 & X_j & Y_j \\ 1 & X_k & Y_k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 0 \\ 1 & 7 & 1 \\ 1 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 1\,м^2,$$

$$A = 0.5\,м^2.$$

$\widetilde{L}_{jk}$ және $\widetilde{L}_{ki}$ қабырғаларының ұзындығы:

$$\widetilde{L}_{jk} = \sqrt{\left(X_j - X_k\right)^2 + \left(Y_j - Y_k\right)^2} = \sqrt{(7-7)^2 + (1-0)^2} = 1\,м,$$

$$\widetilde{L}_{ik} = \sqrt{\left(X_i - X_k\right)^2 + \left(Y_i - Y_k\right)^2} = \sqrt{(6-7)^2 + (0-0)^2} = 1\,м.$$

Онда алынған шамаларды пайдаланып, матрицаны есептейік:

$$\left[k0^{(37)}\right] = \frac{K_{xx}}{4A}\begin{bmatrix} b_i b_i & b_i b_j & b_i b_k \\ b_j b_i & b_j b_j & b_j b_k \\ b_k b_i & b_k b_j & b_k b_k \end{bmatrix} + \frac{K_{yy}}{4A}\begin{bmatrix} c_i c_i & c_i c_j & c_i c_k \\ c_j c_i & c_j c_j & c_j c_k \\ c_k c_i & c_k c_j & c_k c_k \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{3\,kBm\cdot м^2}{4\cdot 0{,}5\,м^2\left(м\cdot {}^0C\right)}\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = \frac{3\,kBm}{2\,м\cdot {}^0C}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left[k1^{(37)}\right] = \frac{h\cdot \widetilde{L}_{ik}}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{50\,kBm\cdot 1\,м}{6\,м^2\cdot {}^0C}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{50\,kBm}{6\,м\cdot {}^0C}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Сонымен,

$$\left[k^{(37)}\right] = \left[k0^{(37)}\right] + \left[k1^{(37)}\right] = \left\{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{50}{3} & 0 & \frac{50}{6} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{50}{6} & 0 & \frac{50}{3} \end{bmatrix}\right\}\frac{kBm}{м\cdot {}^0C} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{109}{6} & 0 & \frac{41}{6} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} \\ \frac{41}{6} & -\frac{3}{2} & \frac{109}{6} \end{bmatrix}\frac{kBm}{м\cdot {}^0C} = \begin{bmatrix} 18.17 & 0 & 6.83 \\ 0 & 1.5 & -1.5 \\ 6.83 & -1.5 & 18.17 \end{bmatrix}\frac{kBm}{м\cdot {}^0C}$$

Қорытынды. Жылулық жүктеме еселік интегралдың қосындысы түрінде есептелінеді:

$$\left\{f^{(37)}\right\} = \frac{hT_\infty \widetilde{L}_{ik}}{2}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q\widetilde{L}_{jk}}{2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{50\,kBm\cdot 40\ {}^0C\cdot 1\,м}{2\,м^2\cdot {}^0C}\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{150\,kBm\cdot 1\,м}{2\,м^2}\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \left\{1000\cdot\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} - 75\cdot\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}\right\}\frac{kBm}{м} = \begin{Bmatrix} 1000 \\ -75 \\ 925 \end{Bmatrix}\frac{kBm}{м}.$$

Қорыта айтсақ, мәселені шешу үшін ықшамдалған матрицаға келтіру тәсілі қолданған тиімді екенін көреміз.

Әдебиеттер тізімі

1. Кутателадзе, С.С. Основы теории теплообмена [Текст] / С.С. Кутателадзе. Изд. 5-е перераб. и доп. – М.: Атомиздат, 2009. – 416 с.
2. Кушнырев, В.И. Техническая термодинамика и теплопередача [Текст] / В.И. Кушнырев, В.И. Лебедев, В.А. Павленко. – М.: Стройиздат, 1986. – 457 с.
3. Аметистов, Е.В. Тепло и массообмен [Текст] / Е.В. Аметистов, В.А. Григорьев, Б.Т. Емцев [и др.]. – М.: Энергогиздат, 1982. – 499 с.

Материал редакцияға 12.02.24 түсті.

С.У. Айсаев[1], Л.Д. Диярова[1]

[1]Каспийский университет технологий и инжиниринга имени Ш.Есенова, г. Актау, Казахстан

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ДВУМЕРНОГО ТЕПЛОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Аннотация. Значение теплообмена как в технике, так и в природе зависит от физико-химических свойств тел в зависимости от температуры, т.е. теплового состояния. Тепловое состояние определяется условиями теплообмена, для чего они оказывают решающее влияние на процессы изменения агрегатного состояния вещества, протекания химических реакций, механических, электроизоляционных, магнитных и других свойств тел. В этой связи рассматриваемый вопрос является важным и актуальным.

Ключевые слова: тепловыделение, минимизация, конвективный теплообмен.

S.U. Aysaev[1], L.D. Diyarova[1]

[1]Sh.Esenov Caspian University of Technology and Engineering, Aktau, Kazakhstan

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE EQUATION OF TWO-DIMENSIONAL THERMAL RADIATION

Abstract. The value of heat exchange both in technology and in nature depends on the physicochemical properties of the bodies depending on temperature, i.e. the thermal state. The thermal state is determined by the conditions of heat exchange, for which they have a decisive influence on the processes of changing the aggregate state of a substance, the course of chemical reactions, mechanical, electrical insulation, magnetic and other properties of bodies, if so, then the question that we consider is important.

Keywords: heat release, minimization, convective heat exchange.

References

1. Kutateladze, S.S. Osnovy teorii teploobmena [Fundamentals of the theory of heat exchange]. – Moscow: Atomizdat, 2009. – 416 p. [in Russian].
2. Kushnyrev, V.I., Lebedev, V.I., Pavlenko, V.A. Tekhnicheskaya termodinamika i teploperedacha [Technical thermodynamics and heat transfer]. – Moscow: Stroyizdat, 1986. – 457 p. [in Russian].
3. Ametistov, E.V., Grigoriev, V.A., Emtsev, B.T. and others. Teplo i massoobmen [Heat and Mass Exchange]. – Moscow: Energogizdat, 1982. – 499 p. [in Russian].