МРНТИ 45.43.09

А.А. Мясников ©

Канд. техн. наук
ORCID *https://orcid.org/0000-0002-7427-0885*
Институт физико-технических проблем Национальной академии наук Кыргызской Республики,
г. Бишкек, Республика Кыргызстан
@ *sky.trek@mail.ru*

https://doi.org/10.55956/ALFS3141

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РЕЖИМА РАБОТЫ УДАРНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. Излагаются основные положения Метода частичных волн для решения прямых и обратных задач для систем уравнений гиперболического типа. В качестве примера рассматривается задача определения геометрии молотка по форме первой волны импульса генерируемого молотком в однородном цилиндрическом стержне.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения гиперболического типа, продольный удар, графо-аналитические методы решения, обратные задачи, волны.

Мясников, А.А. Теоретические исследования режима работы ударных систем [Текст] / А.А. Мясников // Механика и технологии / Научный журнал. – 2023. – №3(81). – С.89-96. https://doi.org/10.55956/ALFS3141

Введение. Широкий класс задач динамики и технологии описывается *линейными уравнениями (1) в частных производных гиперболического типа* [1]:

$$a_{11}(x,\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}+2a_{12}(x,\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x\,\partial\tau}+a_{22}(x,\tau)\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial\tau^2}+$$
$$+b_1(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}+b_2(x,\tau)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial\tau}+c(x,\tau)u(x,\tau)+F(x,\tau)=0\ ,$$
$$a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0\ ; \qquad (1)$$

где: $u(x,\tau)$ – искомая функция двух независимых переменных x и τ; $a_{11}(x,\tau)$, $a_{12}(x,\tau)$, $a_{22}(x,\tau)$, $b_1(x,\tau)$, $b_2(x,\tau)$, $c(x,\tau)$, $F(x,\tau)$ – известные функции.

Эйлер показал, что решением уравнений гиперболического типа являются объекты типа *волн*. По-видимому, не существует единого строгого определения волн. Предпочтительнее руководствоваться интуитивным представлением о волне как о некотором возмущении (вариант – сигнале) перемещающимся вдоль некой среды с некоторой *определяемой скоростью*. Возмущение может быть любого типа, с условием что его локализация определяется в любой момент времени. Возмущение может искажаться, менять свои параметры, включая скорость распространения, но при этом оставаться однозначно различимым.

Такой подход может показаться несколько расплывчатым, но он вполне приемлем. Любая попытка дать более строгое определение приводит к заметно большим ограничениям.

Условия и методы исследования. Концепция волнового движения относится к числу наиболее сложных научных понятий. С одной стороны, волновое движение часто ограничивается описанием с набором более или менее обоснованных гипотез. С другой стороны, волновое движение изучается многими дисциплинами, поскольку почти во всех областях науки и техники встречаются волновые процессы.

Хотя явления часто имеют уникальные особенности, удалось разработать общие подходы к математическому моделированию волновых процессов.

Волны, описываемые гиперболическими уравнениями в частных производных принято называть *гиперболическими волнами*.

Решения уравнений в частных производных не определяет искомые функции в полном смысле, но определяет только некоторые *свойства* класса функций удовлетворяющих уравнениям. Сами функции доопределяются начальными и граничными условиями [2].

Применения *метода частичных волн* для решения *прямых* и *обратных задач* систем уравнений гиперболического типа в частных производных рассматривается применительно к задачам математического моделирования ударных систем технологического назначения.

Общая схема ударных систем показана на рисунке 1.

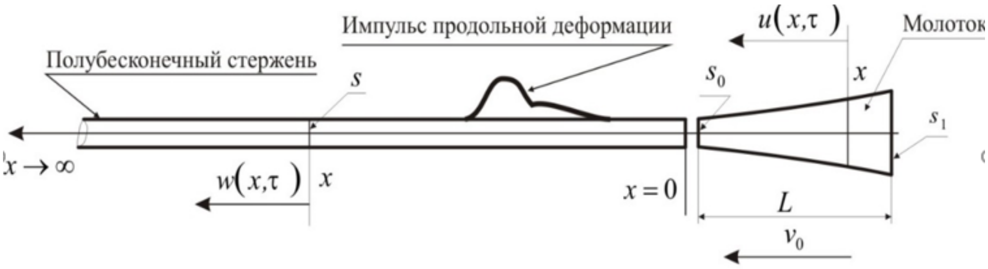


Рис. 1. Схема технологических ударных систем

Молоток, представляющий собой короткий стержень переменного поперечного сечения – молоток – наносит удары по длинному полубесконечному цилиндрическому стержню.

Если материал стержней однороден, торцы плоские, то динамика взаимодействия описывается следующей системой уравнений (2), в системе координат показанной на рисунке 1:

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \frac{d\,s(x)}{d\,x}\frac{1}{s(x)}\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0\ ,$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0\ , \qquad (2)$$

- с начальными условиями:

$$u(x,0)=0,\quad w(x,0)=0,\quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=\frac{v_0}{c};$$

- и граничными условиями:

$$\frac{\partial w(-L,t)}{\partial x}=0,\quad u(0,t)=w(0,t),\quad s\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=s_0\frac{\partial w(0,t)}{\partial x},$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=0;$$

где: $w(x,\tau)$ – функция смещения сечения молотка с координатой x в момент времени τ; $u(x,\tau)$ – функция смещения сечения стержня; $s(x)$ – функция площади поперечного сечения молотка; s – площадь поперечного сечения полубесконечного стержня; $t=c\tau$; $c=\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость распространения продольных колебаний в стержне с модулем упругости *E*, плотностью ρ; s_0 – площадь ударного торца молотка.

Прямой задачей называется определение функции относительной деформации в полубесконечном стержне $\varepsilon_u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ развиваемой импульсом динамической деформации генерируемого продольным ударом молотка заданной геометрии.

Обратной задачей называется определение геометрии молотка через функцию площади поперечного сечения молотка $s(x)$ по известной функции относительной деформации в полубесконечном стержне $\varepsilon_u(x,t)=\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ развиваемой импульсом динамической деформации.

Метод частичных волн основывается на положении, что продольное динамическое деформирование однородных стержней описывается уравнением (3):

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=0,\qquad (3)$$

решение которого может быть представлено в виде:

$$u(x,\tau)=f_+(x-t)+f_-(x+t);$$

где: функция $f_+(x-t)$ определяет волну перемещающуюся вдоль стержня без искажения в положительном направлении оси координат поперечных сечений x; $f_-(x+t)$ – волну перемещающуюся в отрицательном направлении оси координат, как показал Л. Эйлер.

Процесс генерирования продольных волн ударом определяется из условия непрерывности потока усилий и смещений на ударных торцах стержней (рис. 2).

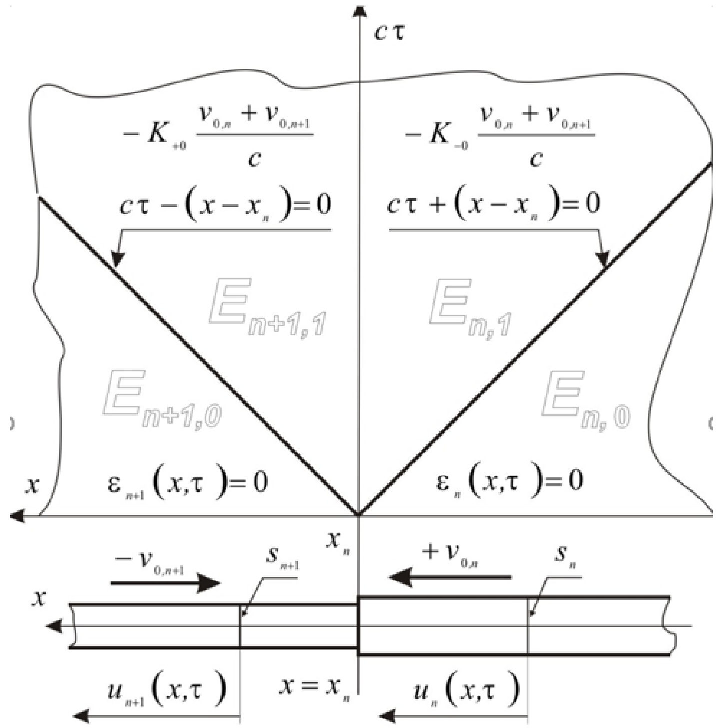


Рис. 2. К анализу генерирования волн динамической деформации цилиндрических стержней при продольном ударе

Если соударяющиеся стержни n и $n+1$ или ударные ступени цилиндрические, то относительные деформации развиваемые волнами будут постоянными и могут быть представлены формулами (4) и (5):

$$\varepsilon_{n+1}=\varepsilon_{+}\cdot\overline{\eta}\left(t-x\right)\ , \tag{4}$$

$$\varepsilon_{n}=\varepsilon_{-}\cdot\overline{\eta}\left(t+x\right)\ , \tag{5}$$

где: $\overline{\eta}\left(z\right)=\begin{cases}1, & при\ z>0\\ 0, & при\ z<0\end{cases}$, импульсная функция Хевисайда.

Из уравнений определяющих непрерывность потоков сил и перемещений находятся функции волн генерируемых на стыке ступеней стержней с момента достижения границы ступеней некоторой *генерирующей волной*. Анализ показывает, что генерируемые на стыке цилиндрических ступеней волны развивают относительные деформации постоянной величины.

Таким образом, строится точный анализ в случае соударения ступенчато цилиндрических стержней, естественно, в рамках точности модели продольного динамического моделирования стержней.

Можно предположить, что в модели достаточно корректной может быть замена стержней с криволинейными образующими боковой поверхности ступенчато-цилиндрическими стержнями. В этом случае основная система заменится неограниченно конечной системой уравнений (6):

$$\frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_1(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_2(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$

. . . .

$$\frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_m(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \qquad (6)$$

с соответственно измененной системой граничных условий.

Результаты исследований и их обсуждение. Аналитически довольно сложно отследить и тем более рационально представить решение прямой задачи. Графическое представление части информации значительно упрощает представление решения. Координатная плоскость $x0t$ разбивается характеристиками, соответствующим функциям Хевисайда, на треугольные области, где значения соответствующие относительным деформациям развиваемых частичными волнами имеют одно и то же значение. Пример решения прямой задачи представлен на рисунке 3.

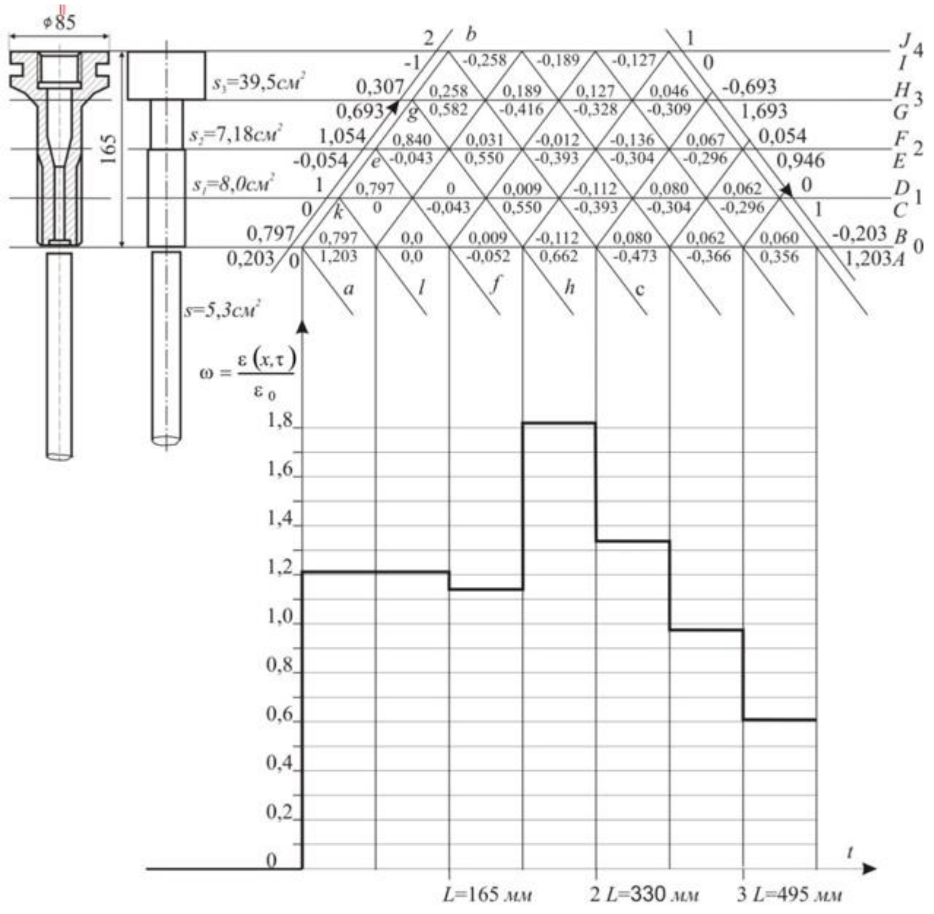
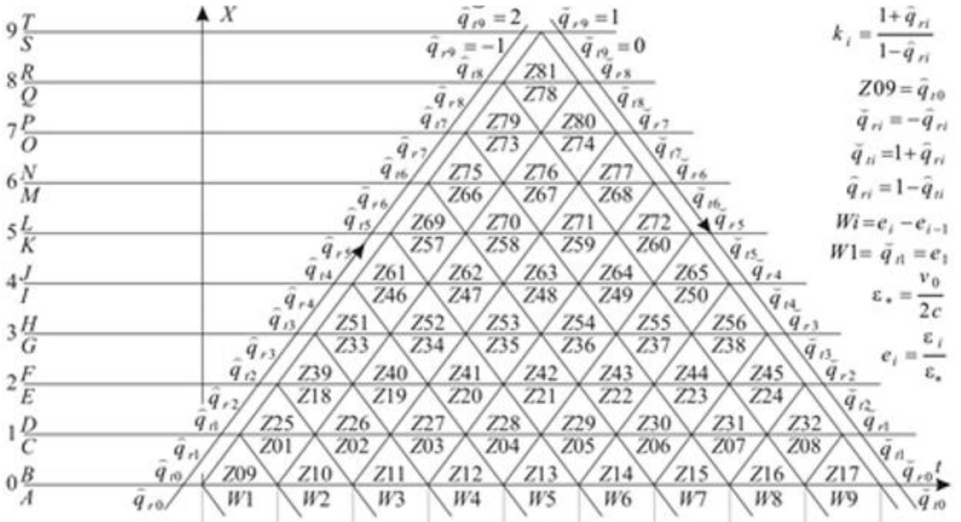


Рис. 3. Графо-аналитическое решение прямой задачи методом частичных волн

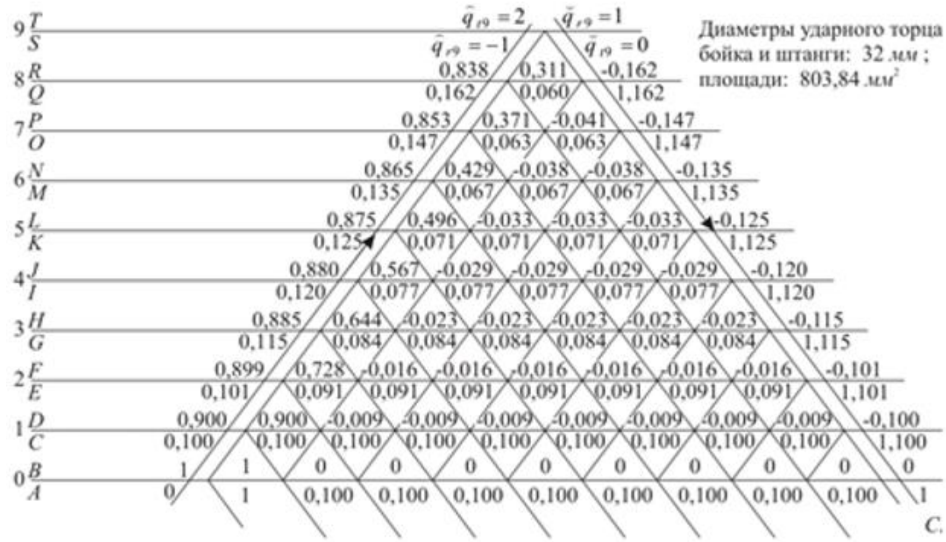
Пример решения обратной задачи показан на рисунке 4. В данном случае это решение задачи по определению геометрии молотка генерирующего «треугольный» импульс, т.е. импульс с линейно возрастающим значением относительной деформации развиваемой первой волной.



A.

Диаметры круглых сечений, *мм*	32	35	39	44	50	57	65	75	104
Площади круглых сечений, *мм*²	803,84	980,68	1201,33	1513,68	1926,91	2478,01	3251,15	4372,80	6965,07
Отношение площадей, k_i	1,220	1,225	1,260	1,273	1,286	1,312	1,345	1,387	0
Коэффициент отражения, $\bar{q}_{ri}$	0,100	0,101	0,115	0,120	0,125	0,135	0,147	0,162	-1,000
Волновые состояния в штанге, *Wi*	*W*1=1	*W*2=0,1	*W*3=0,1	*W*4=0,1	*W*5=0,1	*W*6=0,1	*W*7=0,1	*W*8=0,1	*W*9=0,1
Функция формы, e_i	e_1=1	e_2=1,1	e_3=1,2	e_4=1,3	e_5=1,4	e_6=1,5	e_7=1,6	e_8=1,7	e_9=1,8
Деформация, ε_i									

B.



C.

Рис.4. Решение обратной задачи продольного соударения стержней методом частичных волн

При построении алгоритма решения прямых задач методом частичных волн, были обнаружены зависимости позволившие создать алгоритм решения обратных задач.

В качестве искомой выбрана функция относительной деформации. Современная экспериментальная аппаратура фиксирует именно относительные деформации на поверхности стержней. Остальные функции характеризующие импульс продольной динамической деформации: напряжения, скорости, усилия линейно связаны с функцией относительной деформации.

Заключение. Для проверки точности метода могут быть использованы аналитические решения по определению импульсов динамической деформации генерируемых в полубесконечном стержне продольным ударом молотков с криволинейными образующими боковой поверхности.

Список литературы

1. Агафонов, С.А. Дифференциальные уравнения [Текст]: Учеб. для вузов. 2-е изд. / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко / С.А. Агафонов, А.Д Герман, Т.В. Муратова. – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2000. – 348 с.
2. Терещенко, С.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка [Текст]: Учебно-методическое пособие для решения задач. – Апатиты: Издание КФ ПетрГУ, 2003. 75 с.

Материал поступил в редакцию 13.09.23.

А.А. Мясников

Қырғыз Республикасының Ұлттық ғылым академиясының Физикалық-техникалық мәселелер институты, Бішкек қ., Қырғызстан

СОҚҚЫ ЖҮЙЕЛЕРІНІҢ ЖҰМЫС РЕЖИМІН ТЕОРИЯЛЫҚ ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа. Гиперболалық типті теңдеулер жүйесінің тура және қайтарымды есептерін шешуге арналған жартылай толқындар әдісінің негізгі принциптері келтірілген. Мысал ретінде біртекті цилиндрлік өзекшедегі балғамен тудыратын импульстің бірінші толқыны түріндегі балғаның геометриясын анықтау мәселесі қарастырылған.

Тірек сөздер: гиперболалық типті дифференциалдық теңдеулер, бойлық әсер ету, шешудің графикалық-аналитикалық әдістері, кері есептер, толқындар.

A.A. Myasnikov

Institute of Physical and Technical Problems of the National Academy of Sciences of the Kyrgyz Republic, Bishkek, Kyrgyzstan

THEORETICAL STUDIES OF THE MODE OF OPERATION OF SHOCK SYSTEMS

Abstract. Base principles of the Method of partial waves for the solve of direct and return problems for systems of the equations of hyperbolic type are stated. As an example the problem of definition of geometry of a hammer under the form of the first wave of an impulse generated by a hammer in a homogeneous cylindrical rod is considered.

Keywords: differential equations of hyperbolic type, longitudinal impact, graphic-analytical methods of solution, inverse problems, waves.

References

1. Agafonov, S.A., German, A.D. Muratova, T.V. Differential equations [Differentsialnye uravntnie]: Textbook for universities. 2nd ed. [Uchebnik dlia vusov. 2-e isdanie]. / Ed. V.S. Zarubina, A.P. Krischenko. – M.: Publishing house of MSTU named after N.E. Bauman [Isd-vo MGTU im. H.E. Baumana], 2000. – 348 p. [in Russian]
2. Tereshchenko, S.V. Ordinary differential equations of the first order [Obyknovennye differentsialnye uravnenia pervogo poriadka] / Training manual for solving problems [Uchebno-metodicheskoe posobie dlia reschenia zadach]. – Apatity. Publishing House of the Faculty of PetrSU [Izdanie KF PetrGU], 2003. – 75 p. [in Russian]