ҒТАМР 27.21.15

И.О. Мөлдеков[1], Г.И. Муратова[2]

[1]Техн. ғылым. д-ры, проф., [2]Пед. ғылым. канд., доцент
М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті, Тараз, Қазақастан
e-mail: [2]gauchar70@mail.ru

ШЕҢБЕРДІ ТЕҢДЕЙ БӨЛІКТЕРГЕ БӨЛУ ЕСЕПТЕРІ

Андатпа. Бұл жұмыста дұрыс (n=17, 19) көпбұрыштарды тұрғызу есептері шеңбердің центрлік бұрышын, геометриялық прогрессия заңдылығына сай бөлшектеу әдісімен шығарылады. Демек, жүйелі қателіктер еселенбейді, сондықтан есептердің шығарылу (тұрғызу) дәлдігі артып, бұрыштық айырым шегіне жете азаяды. К.Ф.Гаусс әдісінде есеп $3\varphi\left(3\varphi = 360^\circ : 17\right)$ бұрыштық хорданы (шеңбер центрінен) үш рет қайталап айландыру арқылы шығарылатындықтан жүйелі қателіктердің (жіберлілмеуі) еселенбеуі мүмкін емес екенін (қателіктер теориясы) растайды.

Тірек сөздер: Дұрыс көпбұрыш, шеңбер, хорда, доға, центрлік бұрыш, тұрғызудың тура және кері есептері.

Кіріспе. Циркуль мен сызғыш арқылы шығарылатын геометриялық салу есептері мен сандар теориясының байланыстылығы мөлшерсіз сандар мен кесінділер арқылы дәлелденеді. Геометриялық салу есептерінде мөлшерсіз (доға, хорда ұзындықтарын, ..., πd:n, n=7, 11, 13,...) кесінділерді тұрғызуға тура кледі. Жалпы математикада айнымалыға тәуелді мөлшерсіз өлшемдердің (жуық шамалы сандардың) түбірлік айырымын (шгіне жеткізе) нөлге жуықтату өзекті мәселе болып саналады.

Дұрыс көпбұрыштарды, шеңбердің центрлік бұрышын, геометриялық прогрессия заңдылығына сай бөлшектеу әдісімен тұрғызылса, онда (мөлшерсіз және жуық шамалы) өлшемдердің бұрыштық айырымы шегіне жеткізе азаяды.

Зерттеу шартары мен әдітері.Шеңберді теңдей бөліктерге бөлу дұрыс көпбұрыштарды тұрғызудың кері есептері болып саналады.

Шеңберді 2, 3, 5-ке және осы сандардың екі $\left(2\cdot 2^n; 3\cdot 2^n; 5\cdot 2^n; n = 0, 1, 2, 3, ...\right)$ еселеріне бөлуге болатыны ежелден белгілі. Демек, дұрыс көпбұрыш қабырғалары еселенеді, ал шеңбердің центрлік бұрышы (доғасы), геометриялық прогрессия заңдылығына сай, бөлшектенеді, яғни:

$$\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+... = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) = \varphi \tag{1}$$

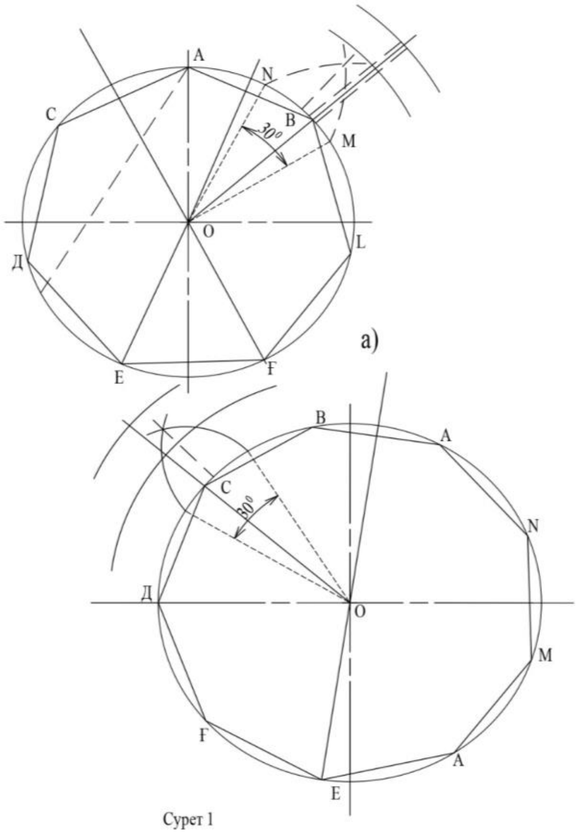
Бұл (1) өрнектен, екіге бөлу амалы арқылы, кез келген (мөлшерсіз) центрлік бұрыштың (немесе доға хордасының) жуық мәнін (айырымын нөлге жуықтатып, $\Delta\varphi \to 0, \Delta\rho \to 0$) жеткілікті дәлдікпен анықтауға болады. Демек, $\left(4\varphi = 360^\circ - 3\varphi,..., 8\varphi = 360^\circ - 5\varphi,...\right)$ бөлшектелінетін центрлік бұрыштың ен үлкен (екіге еселенетін) бөлігіне жуық шамалы $\left(2\varphi', 4\varphi', 8\varphi',...\right)$

бұрыш алынса, онда есептің шығару дәлдігі артады, яғни бұрыштық $\left(\pm\Delta\varphi=\varphi'-\varphi\right)$ айырым шегіне жете азаяды. Сондықтан, төменде келтірілген тұрғызулар 30°-тық центрлік бұрышты (доғаны) бөлшектеуге негізделген.

Зерттеу нәтижелері. 1. Шеңбердің теңдей жеті бөлікке бөлу (сурет 1а). Шеңбер ұзындығы π (трансцендентті мөлшерсіз сан) арқылы анықталатындықтан жетіге нақты бөлінбейтіні дәлелденген ([2], 168-170 б.). Демек, $\varphi=360^\circ:7=51.428571^\circ$ бұрышының төрт еселенген нақты $4\varphi\left(4\varphi=205.714284^\circ\right)$мәніне жуық шамалы $4\varphi'$ бұрышы алынса,

$$4\varphi'=210^\circ-30^\circ\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}\right)=205.625^\circ \qquad (2)$$

онда бұрыштық айырым ($\Delta\varphi=\pm0^\circ08'02'',\Delta\rho=0.0022$) төрт есеге азаяды.



Сурет 1. Шеңбердің центрлік бұрышын бөлшектеу
а) жеті бөлікке, ә) тоғыз бөлікке

Бұл есеп Әл-Фарабидің математикалық трактатында келтірілген ([1], 110-111 б.). Онда, $\varphi'=51^\circ19'50''$, демек $\Delta\varphi=0^\circ05'53'',\Delta\rho=0.001$.

Дұрыс жетібұрышты тұрғызу үшін, АС (АС=АВ) қабырғасы тұрғызылып, АВ мен АС қабырғаларының ортасынан жүргізілген перпендикуляр мен шеңбердің қиылысу нүктелері арқылы EF қабырғасы тұрғызылады. Сонымен $\breve{CE},\breve{BF}$ доғаларын екіге бөлу арқылы жетібұрыштың тұрғызылуы аяқталады.

2. Шеңберді теңдей тоғыз бөлікке бөлу (сурет 1ә). Шеңбердің ценртлік бұрышы тоғызға $\left(\varphi = 40^{\circ}\right)$бөлінгенімен, оның ұзындығы $(\pi d : 9)$ циркуль, сызғышпен тоғызға нақты бөлінбейді.

Сондықтан, тоғыз $\left(2^3 + 1\right)$ бөліктің ең үлкені 8φ-дің мәніне жуық шамалы 8φ-дің мәніне жуық шамалы $8\varphi'$ бұрышы алынса,

$$8\varphi' = 330^{\circ} - 30\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6}\right) = 320.15625^{\circ} \qquad (3)$$

онда бұрыштық айырым $\left(\Delta\varphi = 0.019531^{\circ} = 0^{\circ}01'10''\right)$ нөлге жуықтайды.

Шынымен де бұл әдіспен есептің шығарылу дәлдігін (тұйықталған мөлшерсіз $\left(\pi d\right)$ сандар жүйесінде) одан ары арттыруға мүмкіндік жоқ.

Алдымен $8\varphi'$ бұрышының жартысы $\overset{\cup}{DN}$ доғасы тұрғызылып, аралық (A, B, C) нүктелер анықталады. Енді AB, BC қабырғаларының ортасынан өтетін перпендикуляр мен шеңбердің қиылысу E, K нүктелері тұрғызылады.

Соңында $\overset{\cup}{DE}$ мен $\overset{\cup}{NK}$ доғаларын екіге бөлу арқылы тоғызбұрыш қабырғаларының тұрғызылуы аяқталады.

Басқа есептерде осы әдіспен шығарылады. Бұл есеп трактатта ([1], 113-114 б.) 120°-ты бұрышты үшке бөлу (қосымша тұрғызулар) арқылы шығарылған.

3. Шеңберді теңдей онбір бөлікке бөлу (сурет 2а). Бұл есепте $8\varphi = 8(360 : 11) = 261.8182^{\circ}$ бұрышына жуық шамалы $8\varphi'$бұрышы алынса,

$$8\varphi' = 270^{\circ} - 30\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6}\right) = 262.03125^{\circ} \qquad (4)$$

онда бұрыштық айырым $\left(\Delta\varphi = 0.016634^{\circ} = 0^{\circ}01'00''\right)$ шегіне жете азаяды.

Енді AB қабырғасының ортасы арқылы жүргізілген перпендикуляр шеңбермен C нүктесінде қиылысады. Осы нүктеден көпбұрыштың CD, CE қабырғалары тұрғызылады. Соңында $\overset{\cup}{BD}, \overset{\cup}{AE}$ доғалары төрт-төрттен сегізге бөлінеді.

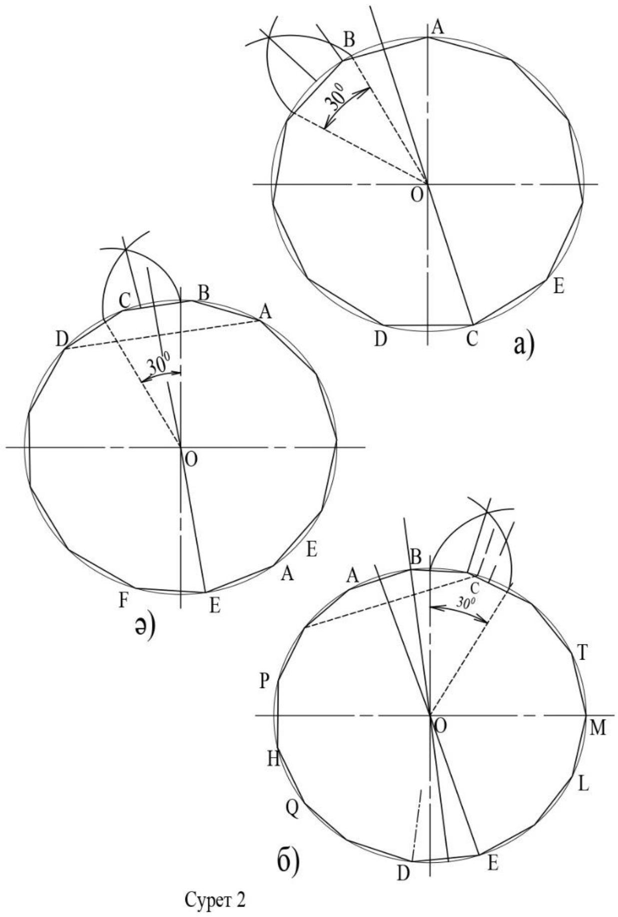
4. Шеңберді теңдей онүш бөлікке бөлу (сурет 2ә). Бұл жағдайда $8\varphi = 8(360 : 13) = 221.5384^{\circ}$ бұрышына жуық шамалы $8\varphi'$ бұрышы алынса,

$$8\varphi' = 210^{\circ} + 30\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6}\right) = 221.7188^{\circ} \qquad (5)$$

онда бұрыштық айырым $\left(\Delta\varphi = 0.0225^{\circ} = 0^{\circ}01'21''\right)$сегіз есеге азаяды.

Жуық мәнді $8\varphi'$ анықталған соң, аралық нүктелердің $\overset{\cup}{AC}$ доғасы екіге бөлініп B нүктесі тұрғызылады. Одан кейін CD қабырғасы тұрғызылып AD хордасының ортасынан өтетін перепендикуляр мен шеңбердің қиылысу E нүктесі арқылы EF, EK қабырғалары тұрғызылады.

Енді DL мен AK аралықтары төрт-төрттен сегізге бөлініп көпбұрыш төбелері толық тұрғызылады.



Сурет 2. Шеңбердің центрлік бұрышын геометриялық прогрессия заңдылығына сай бөлшектеу:
а) он бір бөлікке, ә) он үш бөлікке, б) он бес бөлікке

5. Шеңберді теңдей онбес бөлікке бөлу (сурет 2б). Тұрғызылатын бұрыштың сегіз $\left(8\varphi = 360^\circ - 7\varphi\right)$ есесіне жуық шамалы $8\varphi'$ бұрышы алынса,

$$8\varphi' = 180^\circ + 30\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5}\right) = 192.1875^\circ \qquad (6)$$

онда бұрыштық айырым $\left(\Delta\varphi = 0.0234^\circ = 0^\circ 01' 24''\right)$ сегіз есеге дейін азаяды.

Енді AB, BC хордаларының ортасынан өтетін перпендикулярлардың шеңбермен қиылысу D, E нүктелері тұрғызылады. Одан кейін $\overset{\cup}{AD}, \overset{\cup}{BC}$ доғалары екіге бөлініп M, N нүктелері тұрғызылады. Сонан соң ML, MT, NP, NQ көпбұрыш қабырғалары (AB тең етіп) тұрғызылады. Соңында AP, CT, EL және DQ аралықтары екіге бөлініп көпбұрыш төбелері толық тұрғызылады.

Барлық тұрғызулар екіге бөлу арқылы орындалған, сондықтан жүйелі қателіктер еселенбейді.

Әдебиеттер тізімі

1. Аль-Фараби. Математические трактаты [Текст]. - Алма-ата; Издательство «Наука» Казахской ССР, 1972. – 324 с.
2. Курант, Р. Что такое математика? [Текст] / Р. Курант, Г. Роббинс. - М.: Издательство «Просвещение», 1987. – 559 с.
3. Мөлдеков, И.О. Әл-Фарабидің математикалық трактатындағы геометриялық салу есептері [Мәтін] / И.О. Мөлдеков. – Тараз: ТарМПУ, 2020. - 34 б.

Мақала редакцияға 20.02.22 түсті.

И.О. Мөлдеков, Г.И. Муратова

Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан

ЗАДАЧИ ДЕЛЕНИЯ ОКРУЖНОСТИ НА РАВНЫЕ ЧАСТИ

Аннотация. В статье рассматривается построение правильных многоугольников (n=7, 9, 11, 13, 15, 17, 19) на основе геометрической прогрессии деления центрального угла окружности на равные части. Это позволяет избежать накопления систематических ошибок, увеличить точность решения (построения) задачи и уменьшить до предела угловую невязку. По методу К.Ф.Гаусса для построения правильного многоугольника необходимо произвести трехкратное вращение хорды угла $3\varphi\left(\varphi = 360^{\circ} : 17\right)$ вокруг центра окружности. При таком методе построения происходит непроизвольное накопление систематических ошибок, что подтверждается (теорией ошибок) на практике.

Ключевые слова: Правильный многоугольник, окружность, хорда, дуга, центральный угол, прямая и обратная задачи построения.

I.O. Moldekov, G.I. Muratova

M.Kh. DulatyTaraz regional university, Taraz, Kazakhstan

PROBLEMS OF DIVISION A CIRCLE INTO EQUAL PARTS

Abstract. The paperdeals the construction of regular polygons (*n=7, 9, 11, 13, 15, 17, 19*) based on the geometric progression of dividing the central angle of the circle into equal parts. This avoids the accumulation of systematic errors, increases the accuracy of the solution (construction) of the problem and reduces the angular discrepancy to the limit. According to the Gauss method in order to construct a regular polygon, it is necessary to rotate the chord of the angle three times around the center of the circle. With this method of construction, an involuntary accumulation of systematic errors occurs, which is confirmed (Errors Theory) in practice.

Keywords: regular polygon, circle, chord, arc, central angle, direct and inverse construction problems.

References

1. Al-Farabi. Mathematical treatises. - Alma-ata; Publishing house "Science" of the Kazakh SSR, 1972. - 324 p. [in Russian].
2. Courant R., Robbins G. What is mathematics?. - Moscow: Publishing house "Enlightenment", 1987. - 559 p. [in Russian].
3. Moldekov I.O. Geometric construction problems in Al-Farabi's mathematical treatise. – Taraz: TarMPU, 2020. - 34 p. [in Kazakh].