Техникалық ғылымдар

Технические науки

Technical sciences

ҒТАМР 27.21.15

И.О. Мөлдеков[1], Г.И. Муратова[2]

[1]Техн. ғылым. д-ры, проф., [2]Пед. ғылым. канд., доцент
М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті, Тараз, Қазақстан
e-mail: [2]gauchar70@mail.ru

ДҰРЫС КӨПБҰРЫШТАРДЫ ТҰРҒЫЗУДЫҢ ТУРА ЖӘНЕ КЕРІ ЕСЕПТЕРІ

Андатпа. Бұл жұмыста дұрыс (n=17, 19) көпбұрыштарды тұрғызу есептері шеңбердің центрлік бұрышын, геометриялық прогрессия заңдылығына сай бөлшектеу әдісімен шығарылады. Демек, жүйелі қателіктер еселенбейді, сондықтан есептердің шығарылу (тұрғызу) дәлдігі артып, бұрыштық айырым шегіне жете азаяды. К.Ф.Гаусс әдісінде есеп $3\varphi\left(3\varphi = 360^{\circ} : 17\right)$ бұрыштық хорданы (шеңбер центрінен) үш рет қайталап айландыру арқылы шығарылатындықтан жүйелі қателіктердің (жіберлілмеуі) еселенбеуі мүмкін емес екенін (қателіктер теориясы) растайды.

Тірек сөздер: дұрыс көпбұрыш, шеңбер, хорда, доға, центрлік бұрыш, тұрғызудың тура және кері есептері.

Кіріспе. Циркуль мен сызғыш арқылы шығарылатын геометриялық салу есептері мен сандар теориясының тығыз байланыстығы мөлшерсіз сандар мен кесінділер арқылы дәлелденеді. Геометриялық салу есептерінде мөлшерсіз (доға, хорда ұзындықтарын, ... , πd:n, n=7,…,17, 19) кесінділерді тұрғызуға, яғни сандарды анықтауға тура келеді. Жалпы математикада айнымалыға тәуелді мөлшерсіз өлшемдердің (жуық шамалы сандардың) түбірлік айырымын (шегіне жеткізе) нөлге жуықтату өзекті мәсле болып саналады.

Дұрыс көпбұрыштарды, шеңбердің центрлік бұрышын геометриялық прогрессия заңдылығына сай бөлшектеу әдісімен де тұрғызуға болады. Дәлдігі жағынан, осы әдістемені басқа әдістемелермен салыстыру мақсатында жұмыста, Әл-Фарабидің математикалық трактатындағы геометриялық салу (тура және кері) есептері мен неміс математигі К.Ф.Гаусстың шеңберді теңдей онжеті бөлікке бөлу (кері) есебінің сараптамалары келтірілген.

Шындығында, дұрыс көпбұрыштарды тұрғызуда, олардың тура және кері есептерін қатар қарастырғанда ғана мәселенің қыр-сыры толық ашуға болады.

Әл-Фарабидің математикалық трактатындағы көпбұрыштарды (n=5,6,7,8,9,10) тұрғызулардың басты ерекшілігі, олардың қабырғыларының бір-біріне тізбектелмей тұрғызылуында. Сондықтан, келтірілген тұрғызуларда жүйелі қателіктер еселенбейді, бірақ дұрыс тоғызбұрышты берілген кесіндіге тең етіп тұрғызу үшін қосымша тұрғызуларды (циркуль, сызғышпен орындалмайтын, 120° -ты үшке бөлуді) пайдалынған.

Егер де көпбұрыш (n=7,8,9,10) қабырғалары тізбектеліп тұрғызылатын болса, онда оның периметрінің ұзындығы нақты шамасынан (±Δρ·(n-1)-ге асып немесе кеміп) өзгеріп кетеді. Периметрлердің айырым мөлшері, циркуль ұшының нүктеге дәл қойылмауынан туындайтын (Δρ=±0,1; ±0,2 мм) жүйелі қателігі мен тізбектеліп тұрғызылған көпбұрыш қабырғаларының (n-1) санына байланысты анықталады.

Интернет желісінен алынған Гаусстың шеңберді теңдей онжеті бөлікке бөлу («Правильный семнадцатиугольник») есебінде (Сур.1а) көпбұрыш төбелері $3\varphi\left(\varphi = 360^\circ : 17 = 21^\circ 10' 35{,}292'', 3\varphi = 63^\circ 31' 45{,}876''\right)$ бұрыштық $P_0P_3\left(P_0P_3 = 2\cdot\sin\frac{3\varphi}{2} = 0.526471\right)$ хорданы (шеңбер центрінен) үш рет айландыру арқылы тұрғызылған. Демек, есеп $\cos 3\varphi$-ге тең ON кесіндісін тұрғызу арқылы шығарылады. Сонымен (P_0P_3)хорданы бірінші рет айналымында - P_6, P_9, P_{12}, P_{15} төбелері; екінші рет айналымында $P_1, P_4, P_7, P_{10}, P_{13}, P_{16}$ төбелері үшінші рет айналымда - P_2, P_5, P_8, P_{11} төбелері тұрғызылады. Демек, көпбұрыштың онтөрт (төбесі) хордалары тізбектелеп тұрғызылады.

Тізбектеп тұрғызу әдісінде жүйелі қателіктерден толық арылуға мүмкіндік жоқ. Сондықтан, әр айналымның (I-ң - P_{15}, II –ң - P_{16}, III-ң - P_{11}) соңғы нүктелерінің тұрғызулары дәлме-дәл нақты болып шығуы мүмкін емес екені қателіктер теориясы арқылы расталады. Интернеттен алынған мақалада келтірілген мына сөздер: «При этом построении получается относительная ошибка 0.83%. Углы и стороны получаются таким образом немного больше чем нужно», тізбектеп тұрғызу әдісінде жіберілген жүйелі қателіктерді растайды.

Зерттеу шарттары мен әдістері. Енді шеңберді теңдей онжеті бөлікке қалай бөлінетінін қарастырайық.

Есептеулер арқылы. Гаусс шеңберді Ферма $\left(2^{2^n}+1\right)$ өрнегінен туындайтын жай (3, 5, 17, 257, 65537, ...) сандарға бөлуге болатынын (Гаусс-Ванцель теоремасы негізінде) дәлелдейді.

Мақалада мынандай мәлімет келтірілген: «Гаусс был настолько воодушевлен своим открытием, что в конце жизни завещал, чтобы правильный семнадцатиугольник высекли на его могиле».

Сөздің реті келгенде айта кеткен жөн, Ферма өрнегінің екінші бос мүшесі 3-ке тең етіп алынса да $\left(2^{2^n}+3\right)$, жай (5, 7, 19, 65539, ...) сандар туындайды. Демек, шеңберді жеті, онжеті, онтоғыз бөліктерге циркуль мен сызғыштың көмегімен жеткілікті дәлдікпен бөлуге болады. Шеңберді теңдей жеті бөлікке бөлу есебі Әл-Фарабидің математикалық трактатында келтірілген.

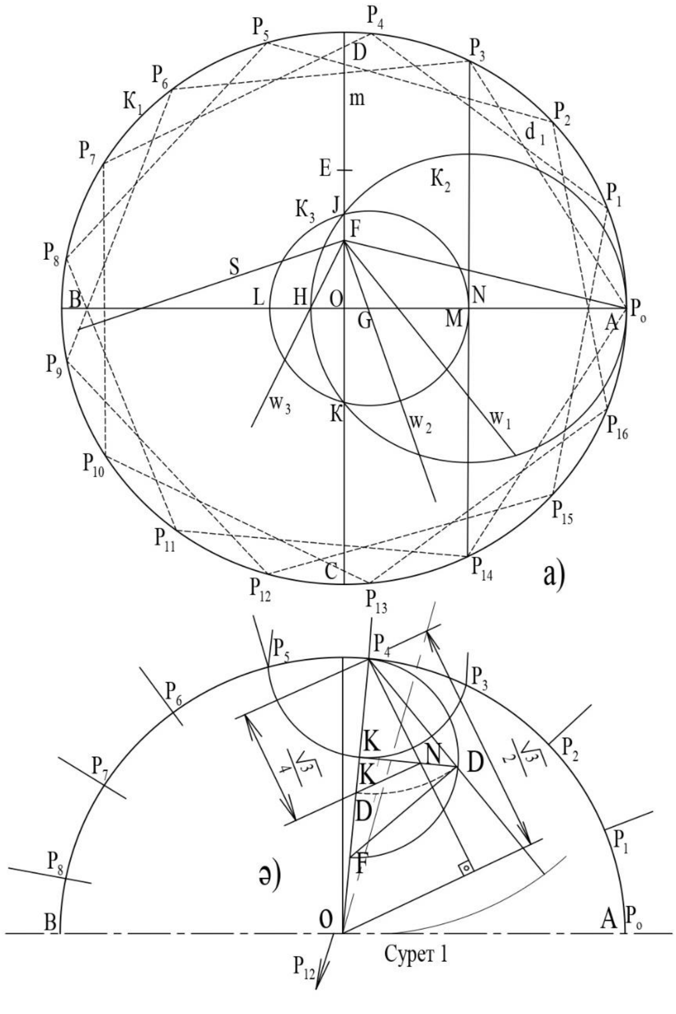
Шеңберді теңдей онтоғыз бөлікке бөлу есебі осы жұмыстың соңында қарастырылады.

1. Шеңберді теңдей он жеті бөлікке бөлу. Есеп белгілі реттілікпен шығарылады.

Гаусс әдісі. Алдымен (сурет 1а), берілген (κ_1) шеңбердің радиусы төртке бөлініп AFO ұшбұрышы тұрғызылады. Оның F төбесіндегі $\alpha\left(\alpha = \angle AFO = 75^\circ 57' 45''\right)$ бұрышы (ω_1, ω_2 биссектрисалары арқылы) төртке бөлініп G нүктесі тұрғызылады, $G = \omega_2 \cap OA$. Шынымен де $\alpha\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}\right)$, $\sin\alpha = 4 : \sqrt{17} = 0.970142$. Бұл сан мөлшерсіз, сондықтан оның бөлшектері де мөлшерсіз сан болыпшығады. Демек, Гаусс анықтаған cos3φ саны (шын мәнінде жуық шамалы $\cos 3\varphi'$) мөлшерсіз сан екені дәлелдеуді қажет етпейді.

Сонан соң, F нүктесінен ω_2 түзуіне перпендикуляр етіп s түзуі жүргізілген соң, s пен ω_2 түзулерінің арасындағы тікбұрыш екіге бөлініп ω_3 биссектрисасы тұрғызылады, сонда ω_3 түзуі OB радиусымен H нүктесінде қиылысады $F \in s \perp \omega_2$, $H = \omega_3 \cap OB$.

Одан кейін, AH кесіндісі екіге бөлініп (M центрлі) κ_2 шеңбері жүргізіледі, $R_2 = HM = MA$. Осы κ_2 шеңбер CD диаметірін J, K нүктелерінде қиып өтеді.



Сурет 1. Шеңберді теңдей он жеті бөлікке бөлу:
а) Гаусс әдісі, ә) автор әдісі

Енді, $G(G = \omega_2 \cap OA)$ нүктесін шеңбердің центрі етіп алып, радиусы $R_3 = GJ = GK$ тең κ_3 шеңбері тұрғызылады. Осы κ_3 шеңбер OA радиусын N нүктеінде қиып өтеді, $N = \kappa_3 \cap OA$.

Соңында, N нүктесінен κ_3 шеңберіне жүргізілген жанама сызық κ_1 шеңберін P_3 және P_{14} нүктелерінде қиып өтеді. Сонда, тұрғызылған ON кесіндісі $\cos 3\varphi$ -ге тең болып шығады, $ON = \cos 3\varphi = 0.4459$, ал $AP_3(P_0P_3)$ және $AP_{14}(P_0P_{14})$ кесінділері 3φ бұрыштық шеңбер хордаларына тең болады, $P_0P_3 = P_0P_{14} = 2 \cdot \sin\frac{3\varphi}{2}.\quad (R = 1).$

Гаусс есептеулері, яғни $\cos 3\varphi$ (мөлшерсіз) шамасының анықталуы теориялық жағынан маңызды болғанымен, оның тұрғызылуы күрделі, демек практикалық қолданысы шектеулі.

Бұл кері есеп, тура есепті шығару үшін қосымша күрделі тұрғызуларды орындауға тура келеді. Салу есебінің қандай (тура, кері) түрі болмасын, оның турғызылуы жеңіл, ал нәтижесі қойылған талапқа сай болып тұрғызылуы тиіс. Ол үшін $\left(2 \cdot \sin\frac{\varphi}{2}, \cos\varphi, 2 \cdot \sin\frac{3\varphi}{2}, \cos 3\varphi, ..., т.б.\right)$ мөлшерсіз сандарды жеткілікті дәлдікпен алмастыра алатын мөлшерсіз сандар анықталып, сызба тек қана циркуль мен сызғыштың көмегі арқылы орындалуы тиіс.

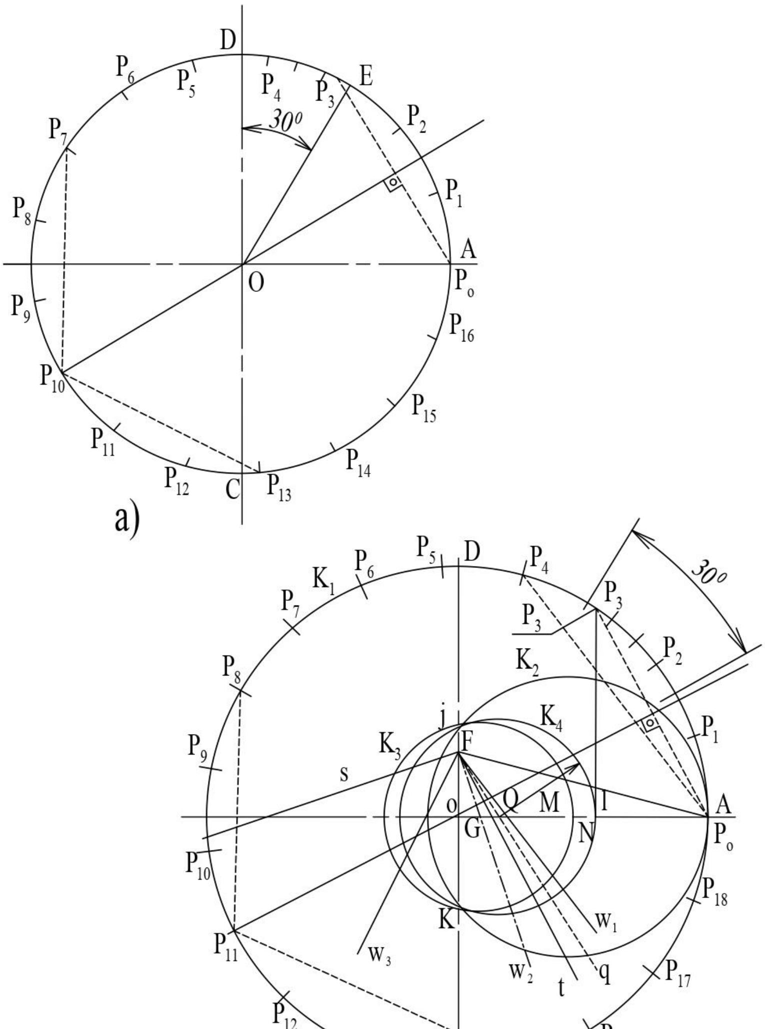
Зерттеу нәтижелері. **Бірінші әдіс.** Алдымен кері есепті қарастырайық. Берілген (сурет 1ә) сызбада алдыңғы есеппен (дәлдігін) салыстыру үшін OA (R=OA) радиуысына тең етіп (жарты) шеңбер тұрғызылды. Оның P_4 нүктесінен өтетін шеңбер радиусына, яғни (P_4-тен) P_4O түзуіне 30° және 45° жасайтын екі $(P_4W; P_4T)$ түзу тұрғызылып, $D'\left(D'E'P_4O; P_4D' = \frac{1}{2}R\right)$ нүктесінен P_4W түзуіне перпендикуляр $(D'H \perp P_4W)$ жүргізілген, ал P_4T түзуіне P_4D' кесіндісі $(P_4D' = 0.5R)$ өлшеніп салынған. Сонда тұрғызылған H пен D нүктелері (шеңбер радиусына, яғни P_4O-ға перпендикуляр орналасқан) бір түзудің бойында жатады $DK \equiv HK'$. Осы тұрғызылған P_4K, P_4K' кесінділер онжетібұрыштың қабырғасы ретінде қабылданады. Себебі $x' = 2\sin\frac{\varphi}{2} = 0.3675;\ P_4K = 0.5\cos 45^\circ = 0.3536;$ ал $P_4K' = \frac{\sqrt{3}}{4}\cos 30^\circ = 0.3750$. Демек $P_4K \prec x' \prec P_4K'$. Айырымдары аз, $x' - P_4K = 0.0139$, ал $P_4K' - x' = 0.0075$, жуық мәнді кесінділер.

Бұл айырмдар онжетібұрыштың тұрғызылуына әсер етпейді, оған сызбаларды (сурет 1а,ә) салыстырып та көз жеткізуге болады.

Сызбадағы (сурет 1ә) онжетібұрыштың қалған төбелерін тұрғызу үшін P_4, P_3 кесіндісінің ортасына тұрғызылған перпендикуляр шеңберді P_{12} нүктесінде қиып өтеді. Енді $\overset{\cup}{P_3P_{12}}$ мен $\overset{\cup}{P_4P_{12}}$ доғаларының әр қайсысы сегізге бөлініп, көпбұрыш төбелерінің тұрғызылуы аяқталады. Сонда жүйелік қателіктер еселенбейді. Бұл практикалық жағынан да тиімді.

Тура есепте көпбұрышқа сырттай сызылған шеңбердің радиусы анықталады. Ол үшін кез келген бос жерге катеттері берілген кесіндіге тең болатындай етіп тікбұрышты үшбұрыштың (P_4D) гипотенузасы тұрғызылса жеткілікті. Себебі тұрғызылған гипотенуза ұзындығын екі еселесе ізделінген шеңбер радиусына тең болып шығады.

Сызбада (сурет 1ә) $R = P_4O = P_4T = 2P_4D$. Ізделінген шеңбер радиусын сызбада көрсетілгендей етіп $\left(\angle OP_4H = 30^\circ\right) P_4HD'$ тікбұрышты $\left(\angle P_4HD' = 90^\circ\right)$ үшбұрыштың $\left(P_4D'\right)$ гипотенузасын тұрғызу арқылы анықтауға болады. Оның ұзындығы ізделінген шеңбер радиусының жартысына тең болады, $\left(P_4D' = \frac{1}{2}P_4O\right)$.



Сурет 2. Шеңбердің центрлік бұрышын бөлшектеу:
а) он жеті бөлікке, ә) он тоғыз бөлікке

Демек көпбұрыш төбелерін тұрғызу қиындық туғызбайды.

Енді шеңберді теңдей бөліктерге тек қана циркуль мен сызғыштың көмегімен бөлудің тиімді әдісін келтірейік.

Геометриялық салу есебінің тұрғызулары неғұрылым күрделі болса, оның нәтижесінің практикалық қолданысы соғұрлым шамалы болады.

Екінші әдіс. Геометриялық прогрессия заңдылығына сай шеңбер доғасын бөлшектеу амалы. Тұрғызулар 30° градустық доғаны бөлшектеуге негізделген (сурет 2а).

Шеңбердің центрлік бұрышын 17(2^4 +1)-ге бөліп, оның үш есесі нақтыланады: $3\varphi = 3(360^\circ : 17) = 63.529^\circ$

Осы (3φ) бұрышқа жуық мәнді $3\varphi'$ бұрышы (№1 кестедеге қараңыз) алынады:

$$3\varphi' = 60^\circ + 30^\circ\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^7} - \frac{1}{2^{11}}\right) = 63.530^\circ \qquad (1)$$

Сонда бұлардың айырымы $\Delta\varphi = 0.001^\circ$-тан кем. Сызбада бөлшектеудің $\frac{30}{2^6}$ бөлігіне дейін тұрғызуға болады, ал қалғандарының практикалық қажеттілігі де туындамайды (ГОСТ 2.303-84-те $\frac{s}{3} = 0.3,\ 0.6 \le s \le 1.4$). Сондықтан, AP_3 хордасы тұрғызылса жеткілікті, $AE + EP_3 = 63.75^\circ$.

Нақтыланған 3φ бұрыш пен таңдалған $3\varphi'$ бұрыштың айырымы ($\Delta\varphi = 0.22^\circ$), хордаларының айырымы $(\Delta\rho = 0.003)$ көпбұрыш қабырғалары тізбектелмесе, олардың тұрғызылу дәлдігіне әсер етпейді.

Енді AP_3 хордасы тұрғызылады, оның ортасынан өтетін перпендикуляр шеңберді P_{10} нүктесінде қиып өтеді. Ары қарай, P_{10} нүктесінен шеңбер бойына $P_{10}P_7$ және $P_{10}P_{13}$ хордалары салынады. Бұдан кейін, P_3P_7 және P_0P_{10} $(A \equiv P_0)$ доғалары төрт-төрттен сегізге бөлініп P_4, P_5, P_6 және P_{14}, P_{15}, P_{16} нүктелері тұрғызылады. Соңында P_0P_3; P_7P_{10} және $P_{10}P_{13}$ доғаларының $P_1, P_2, P_8, P_9, P_{11}, P_{12}$ нүктелері тұрғызылады. Осымен көпбұрыш төбелерінің тұрғызылуы аяқталады.

Бұл есепте $\varphi = \frac{360^\circ}{2^4+1} = 21.17647^\circ$, демек $16\varphi = 360^\circ - \varphi = 338.82353^\circ$. Осы 16φ бұрыштың нақтыланған мәніне жуық шамалы $16\varphi'$ бұрышы

$$16\varphi' = 360^\circ - 30\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^5} - \frac{1}{2^6}\right) = 338.90625^\circ \qquad (2)$$

(2) тең етіп алынса, онда бұрыштық айырым $\Delta\varphi = 0.00517^\circ = 0^\circ 00' 19''$-қа дейін шегіне жете азаяды.

Шеңберді теңдей онтоғыз бөлікке бөлу (сурет 2ә). Бұл есепте шеңбердің центрлік бұрышы 19-ға бөлініп, оның 16 есесі $(16\varphi = 360^\circ - 3\varphi = 303.1579)$ алынады.

Осы 16φ бұрышқа жуық мәнді $16\varphi'$ бұрышы төменгі өрнектен анықталады:

$$16\varphi' = 300^{\circ} + 30^{\circ}\left(\frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^6}\right) = 303.2812 \tag{3}$$

Сонда, бұрыштық айырым $\Delta\varphi = 0.00771^{\circ} = 0^{\circ}00'28''$-ке тең болып шығады.

Есептің шығарылуы сызбада $4\varphi'$ доғасын тұрғызу арқылы орындалған. Алдымен $\overset{\smile}{AP_4}$ доғасы тұрғызылып төртке бөлінеді. Сонда аралық (P_1, P_2, P_3) нүктелер анықталады. Сонан соң P_1P_2 хордасынын ортасынан өтетін перпендикуляр мен шеңбердің қиылысу (P_{11}) нүктесі тұрғызылады.

Енді $(P_3P_{11}), P_0P_{11}$ $(P_0 \equiv A)$ аралықтары сегіз-сегізден 16-ға бөлінеді. Осымен көпбұрыш төбелерінің тұрғызылуы аяқталады.

Кесте 1

Доға бұрышын бөлу

$\frac{30^{\circ}}{2^3}$	$\frac{30^{\circ}}{2^4}$	$\frac{30^{\circ}}{2^5}$	$\frac{30^{\circ}}{2^6}$	$\frac{30^{\circ}}{2^7}$	$\frac{30^{\circ}}{2^8}$	$\frac{30^{\circ}}{2^9}$	$\frac{30^{\circ}}{2^{10}}$	$\frac{30^{\circ}}{2^{11}}$	$\frac{30^{\circ}}{2^{12}}$
$3^{\circ}45'$	$1^{\circ}52'$	$56^{\circ}15'$	$28'8''$	$14'4''$	$7'2''$	$3'31''$	$1'45''$	$0'52''$	$0'26''$
3.75°	1.88°	0.94°	0.47°	0.23°	0.12°	0.06°	0.03°	0.015°	0.007°

Бұл есепті Гаусс әдісімен шығару үшін, алдымен $\alpha(\angle AFO)$ бұрышы 16-ға бөлінеді: $\alpha\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4}\right)$. Содан соң q биссектрисасы мен OA радиусының қиылысу Q нүктесі (κ_4 шеңберінің центрі) тұрғызылады, $Q = q \cap OA$. Енді κ_4 $(R_4 = QJ = QK)$ шеңбері жүргізіліп, оның OA радиусымен қиылысу V нүктесі тұрғызылады. Осы κ_4 шеңберге V нүктесінен жүргізілген жанама сызық κ_1 $(R_1 = 1)$ шеңберін P_3' нүктесінде қиып өтеді.

Екі әдіспен тұрғызылған (AP_3, AP_3') хордалар (мөлшерсіз кесінділердің) бір мәнді болып шығуы мүмкін емес, бірақ олардың айырымы жоғарыда келтірілген $(\Delta\varphi,\ \Delta\rho)$ айырымдардан аспайды.

Әдебиеттер тізімі

1. Аль-Фараби. Математические трактаты [Текст]. - Алма-ата; Издательство «Наука» Казахской ССР, 1972. – 324 с.
2. Курант, Р. Что такое математика? [Текст] / Р. Курант, Г. Роббинс. - М.: Издательство «Просвещение», 1987. – 559 с.
3. Мөлдеков, И.О. Әл-Фарабидің математикалық трактатындағы геометриялық салу есептері [Мәтін] / И.О. Мөлдеков. – Тараз: ТарМПУ, 2020. - 34 б.

Мақала редакцияға 20.02.22 түсті.

И.О. Мөлдеков, Г.И. Муратова

Таразский региональный университет имени М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

Аннотация. В статье рассматривается построение правильных многоугольников (n=17, 19) на основе геометрической прогрессии деления центрального угла окружности на равные части. Это позволяет избежать накопления систематических ошибок, увеличить точность решения (построения) задачи и уменьшить до предела угловую невязку. По методу К.Ф. Гаусса для построения правильного многоугольника необходимо произвести трехкратное вращение хорды угла $3\varphi\left(\varphi = 360^{\circ} : 17\right)$ вокруг центра окружности. При таком методе построения происходит непроизвольное накопление систематических ошибок, что подтверждается (теорией ошибок) на практике.

Ключевые слова: правильный многоугольник, окружность, хорда, дуга, центральный угол, прямая и обратная задачи построения.

Moldekova I.O., Muratova G.I.

M.Kh. Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF CONSTRUCTING REGULAR POLYGONS

Abstract. The paperdeals the construction of regular polygons (*n=17, 19*) based on the geometric progression of dividing the central angle of the circle into equal parts. This avoids the accumulation of systematic errors, increases the accuracy of the solution (construction) of the problem and reduces the angular discrepancy to the limit. According to the Gauss method in order to construct a regular polygon, it is necessary to rotate the chord of the angle three times around the center of the circle. With this method of construction, an involuntary accumulation of systematic errors occurs, which is confirmed (Errors Theory) in practice.

Keywords: regular polygon, circle, chord, arc, central angle, direct and inverse construction problems.

References

1. Al-Farabi. Mathematical treatises. - Alma-ata; Publishing house "Science" of the Kazakh SSR, 1972. - 324 p. [in Russian].
2. Courant R., Robbins G. What is mathematics?. - Moscow: Publishing house "Enlightenment", 1987. - 559 p. [in Russian].
3. Moldekov I.O. Geometric construction problems in Al-Farabi's mathematical treatise. – Taraz: TarMPU, 2020. - 34 p. [in Kazakh].