ҒТАМР 27.41.23, 27.21.19

Н.А. Абиев[1] – *негізгі автор,*
А.Қ. Сегізбаева[2]
©

[1]Физ.-мат. ғылым. канд., доцент, [2]Магистрант

М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті

Тараз қ., Қазақстан Республикасы

[1]abievn@mail.ru

https://doi.org/10.55956/TXMR2606

ЖАЗЫҚ ҚИСЫҚТАРДЫҢ ЕРЕКШЕ НҮКТЕЛЕРІН КЛАССИФИКАЦИЯЛАУҒА КОМПЬЮТЕРЛІК ТЕХНОЛОГИЯЛАРДЫ ПАЙДАЛАНУ

Андатпа. Мақалада жазық қисық сызықтардың ерекше нүктелерін классификациялауға қатысты сұрақтар қарастырылады. Компьютерлік технологияларды қолдана отырып, қол жұмысын азайту мен есептеу үрдісін жылдамдату жұмыстың негізгі мақсаты болып табылады. Жұмыста қисықтардың ерекше нүктелерінің классификациясын компьютерлік жолмен алу алгоритмдері ұсынылады. Осы алгоритмдер программа түрінде іске асырылған.

Тірек сөздер: жазық қисық, алгебралық қисық, қарапайым нүкте, ерекше нүкте, оңашаланған нүкте, өз-өзін қиып өту нүктесі, қайту нүктесі.

Абиев, Н.А. Жазық қисықтардың ерекше нүктелерін классификациялауға компьютерлік технологияларды пайдалану [Мәтін] / Н.А. Абиев, А.Қ. Сегізбаева // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2021. – №1(71). – Б.151-161. https://doi.org/10.55956/TXMR2606

Кіріспе. Қисық сызықтардың қарапайым нүктелерінің геометриясы өте оңай және дифференциалдық геометрия бойынша жарияланған дерлік барлық әдебиеттерде шағылдырылған. Алайда ерекше нүктелерге қатысты ақпарат көбінесе реті жоғары болмаған жағдайлармен шектеліп келеді. Осындай болған күнде де, ерекше нүктелердің типтерін қолмен есептеп анықтау зерттеушілер үшін техникалық тұрғыдағы қиыншылықтарды тудырады. Сонымен бірге, осындай қисықтардың графигін салу да оңай емес. Мұндай жағдай соңғы жылдары компьютерлік технологиялардың пайда болуымен өзгеруде. Біз ұсынып отырған жұмыста компьютерлік технологиялардың айқын емес теңдеулермен берілетін қисықтардың ерекше нүктелері типтерін анықтау есептеріне қолданыстарын көрсетеміз.

Зерттеудің алғышарттары және әдістері. Дифференциалдық геометрияның негізгі ұғымдарына және анықтамаларына қысқаша тоқталайық.

Анықтама. Егер $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ шарттары орындалса, онда $F(x, y) = 0$ қисық сызығының (x_0, y_0) нүктесі ерекше нүкте деп аталады.

Ыңғайлы болсын үшін, $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ дербес туындыларына F_x^0 түріндегі қысқаша белгілеулерді пайдаланатын боламыз. Жоғары ретті ерекше нүктелерді зерттеу үшін [1-3] жұмыстары нәтижелерін пайдаланамыз.

Теорема. Айталық (x_0, y_0) нүктесі $F(x, y) = 0$ қисығы үшін ерекше нүкте болсын. Екінше ретті $F_{xx}^0 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} F(x_0, y_0)$, $F_{xy}^0 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F(x_0, y_0)$, $F_{yy}^0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(x_0, y_0)$ туындылары бір мезгілде нөлге тең болмайды деп ұйғарайық. Сонда

$$\Delta = F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0 \quad (1)$$

шамасының таңбасына байланысты, келесі жағдайлар орын алуы мүмкін:

егер $\Delta > 0$ болса, онда (x_0, y_0) - оңашаланған нүкте;

егер $\Delta < 0$ болса, онда (x_0, y_0) - өз-өзін қиып өту нүктесі;

егер $\Delta = 0$ болса, онда (x_0, y_0) - қайту нүктесі.

Қайту нүктесі қосымша зерттеулерді талап етеді. [2,3] жұмыстары нәтижелерін қорытындылай келе, қайту нүктесінің тегін анықтаудың келесі критериясын ұсынуға болады. Аргументтің $u = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0}$ мәнінде

$$V = F_{xxx}^0 + 3F_{xxy}^0 u + 3F_{xyy}^0 u^2 + F_{yyy}^0 u^3 \quad (2)$$

функциясының мәнін табамыз. Егер $V \neq 0$ болса, онда (x_0, y_0) - I текті қайту нүктесі, ал егер $V = 0$ болса, онда (x_0, y_0) - II текті қайту нүктесі.

Maple есептеу жүйесінің командалары мен графикалық мүмкіндіктеріне қатысты қажетті мәліметтерді [4] еңбегінен табуға болады.

Зерттеудің нәтижелері. Біз ұсынған программада тұтынушы тек бастапқы деректі, яғни қисықтың теңдеуін ғана енгізеді. Қалған барлық жұмысты- функцияның үшінші ретке дейінгі дербес туындыларын есептеуді, ерекше нүктелерін табуды, олардың типтерін анықтауды және график салуды компьютер орындайды. Енді компьютерлік программаның жұмыс нәтижесін демонстрациялайық.

Мысалға, мынадай күрделі қисық қарастырайық:

$$40x^3 - 24x^2 y - 24xy^2 + 40y^3 + 12x^2 - 12y^2 + 12xy - 6x - 6y + 5 = 0. \quad (3)$$

Бұл қисық [5] жұмысында Риччи ағымдарын зерттеу кезінде алынған болатын.

Программаға тек бастапқы деректі, яғни қисықтың теңдеуін ғана енгіземіз:

$$F := \mathbf{proc}(x, y)\ 40\cdot x^3 - 24\cdot x^2\cdot y - 24\cdot x\cdot y^2 + 40\cdot y^3 - 12\cdot x^2 - 12\cdot y^2 + 12\cdot x\cdot y - 6\cdot x - 6\cdot y + 5\ \mathbf{end}:$$

Сонда $F(x,y)$ функциясының бірінші ретті туындыларын программа былай табады:

$$> Fx := \mathbf{proc}(x, y)\ \frac{\partial}{\partial x}F(x, y)\ \mathbf{end}:\ Fy := \mathbf{proc}(x, y)\ \frac{\partial}{\partial y}F(x, y)\ \mathbf{end}:$$

$$> Fx(x, y);\ Fy(x, y);$$

$$120\,x^2 - 48\,x\,y - 24\,y^2 - 24\,x + 12\,y - 6$$
$$-24\,x^2 - 48\,x\,y + 120\,y^2 + 12\,x - 24\,y - 6$$

$F(x,y)$ функциясының екінші ретті туындылары мына командалар арқылы табылады:

$$> Fxx := \mathbf{proc}(x, y)\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x, y)\ \mathbf{end}:$$

$$> Fyy := \mathbf{proc}(x, y)\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x, y)\ \mathbf{end}:$$

$$> Fxy := \mathbf{proc}(x, y)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}F(x, y)\right)\ \mathbf{end}:$$

$$> Fxx(x, y);\ Fyy(x, y);\ Fxy(x, y)$$

$$240\,x - 48\,y - 24$$
$$-48\,x + 240\,y - 24$$
$$-48\,x - 48\,y + 12$$

Қисықтың ерекше нүктелерін, яғни $F = F_x = F_y = 0$ шарттарын қанағаттандыратын нүктелерін іздейміз. Тиісті командалар:

$$> solve(\{F(x, y), Fx(x, y), Fy(x, y)\}, \{x, y\}) : solo := allvalues(\%);$$

$$solo := \left\{x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\right\}$$

$$> x_0 := rhs(solo[1]);\ y_0 := rhs(solo[2]);$$

$$x_0 := \frac{1}{2}$$
$$y_0 := \frac{1}{2}$$

Жалғыз ақ $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ ерекше нүктесі табылды. Енді мұның типін анықтаймыз. Ол үшін бізге осы нүктедегі екінші ретті туындылардың мәндері қажет:

$Fxx\_0 := subs(x = x_0, y = y_0, Fxx(x, y));\ Fyy\_0 := subs(x = x_0, y = y_0, Fyy(x, y));\ Fxy\_0 := subs(x = x_0, y = y_0, Fxy(x, y));$

$$Fxx\_0 := 72$$
$$Fyy\_0 := 72$$
$$Fxy\_0 := -36$$

Енді (1) өрнегі таңбасын табу арқылы, $(x_0, y_0) = (1/2, 1/2)$ ерекше нүктесінің типін анықтаймыз:

$> \Delta := Fxx\_0 \cdot Fyy\_0 - Fxy\_0^2$

$$\Delta := 3888$$

if $\Delta > 0$
then *print*("Оңашаланған нүкте")
else if $\Delta < 0$ **then** *print*("Өзін қиып өту нүктесі") **else** *print*("Қайту нүктесі") **end if**
end if

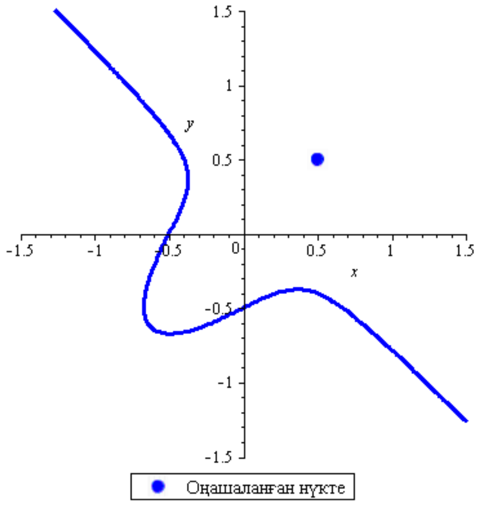
"Оңашаланған нүкте"

Графикті мониторға алып шығамыз:

$curve := implicitplot(F(x, y), x = -20\,..20, y = -20\,..20, grid = [1500, 1500], scaling = constrained, color = blue, thickness = 3):$

$os := plot(Vector([x_0]), Vector([y_0]),$ style = point, symbol = solidcircle, symbolsize = 20, color = blue, legend = "Оңашаланған нүкте") :

$display(curve, os, view = [-1.5\,..1.5, -1.5\,..1.5], scaling = constrained)$



Сурет 1. (3) қисығының ерекше нүктесі

$a = 3$ кезіндегі лемнискатаның мысалында өз өзін қиып өту нүктесін көруге болады:

$$F(x,y)=(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2-a^4=0. \qquad (4)$$

Командалар қайталанған себепті, тек нәтижелерді ғана көрсетіп, қысқартып жазамыз.

Сонда $F(x,y)$ функциясының бірінші ретті туындылары:

$$4\left(x^2+y^2+9\right)x-72x$$
$$4\left(x^2+y^2+9\right)y$$

$F=F_x=F_y=0$ теңдеулер жүйесі шешімдері, яғни қисықтың ерекше нүктелері:

$$x_0:=0$$
$$y_0:=0$$

$F(x,y)$ функциясының екінші ретті туындылары:

$$12x^2+4y^2-36$$
$$4x^2+12y^2+36$$
$$8xy$$

Бұлардың $(x_0,y_0)=(0,0)$ ерекше нүктесіндегі мәндері:

$Fxx\_0 := subs\left(x=x_0, y=y_0, Fxx(x,y)\right);\ Fyy\_0 := subs\left(x=x_0, y=y_0, Fyy(x,y)\right);\ Fxy\_0 := subs\left(x=x_0, y=y_0, Fxy(x,y)\right);$

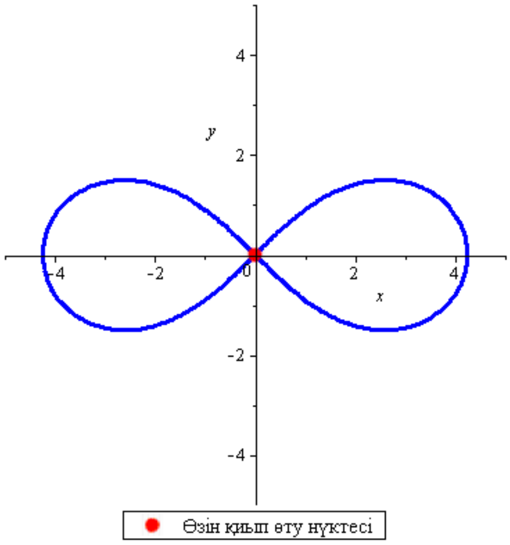
$$Fxx\_0 := -36$$
$$Fyy\_0 := 36$$
$$Fxy\_0 := 0$$

$\Delta=F^0_{xx}F^0_{yy}-F^0_{xy}$ өрнегінің таңбасы және $(x_0,y_0)=(0,0)$ ерекше нүктесінің типі:

$$\Delta := -1296$$

if $\Delta > 0$
  then *print*("Оңашаланған нүкте")
  else if $\Delta < 0$ **then** *print*("Өзін қиып өту нүктесі") **else** *print*("Қайту нүктесі") **end if**
end if

"Өзін қиып өту нүктесі"



Сурет 2. (4) қисығының ерекше нүктесі

Енді қайту нүктелеріне тоқталайық. [5] жұмысында 12 дәрежедегі көпмүше арқылы сипатталынатын бетті зерттеген кезде мынадай өте күрделі қисық алынған болатын:

$$F(x,y)=(x+y)(4xy-1)(4xy-x-y+1)(4xy+x+y+1)+$$

$$+(16x^2y^2+1)(13x^2+22xy+13y^2)-$$

$$-4(x^2+y^2)(11x^2+18xy+11y^2)=0. \qquad (5)$$

Осы қисықтың бірінші квадранттағы ерекше нүктелерін зерттеп көрейік:

> $Fx(x,y);\ Fy(x,y)$

$$4(4xy-1)(4xy-x-y+1)(4xy+x+y+1)+4(4x+4y)y(4xy-x-y+1)(4xy+x+y+1)+(4x+4y)(4xy-1)(4y-1)(4xy+x+y+1)+(4x+4y)(4xy-1)(4xy-x-y+1)(4y+1)+32xy^2\left(13x^2+22xy+13y^2\right)+\left(16x^2y^2+1\right)(26x+22y)-8x\left(11x^2+18xy+11y^2\right)-\left(4x^2+4y^2\right)(22x+18y)$$

$$4(4xy-1)(4xy-x-y+1)(4xy+x+y+1)+4(4x+4y)x(4xy-x-y+1)(4xy+x+y+1)+(4x+4y)(4xy-1)(4x-1)(4xy+x+y+1)+(4x+4y)(4xy-1)(4xy-x-y+1)(4x+1)+32x^2y\left(13x^2+22xy+13y^2\right)+\left(16x^2y^2+1\right)(22x+26y)-8y\left(11x^2+18xy+11y^2\right)-\left(4x^2+4y^2\right)(18x+22y)$$

Көрініп тұрғандай, қисық теңдеуіндегі F функциясы және мұның бірінші ретті туындылары өте күрделі өрнектермен беріледі. Сондықтан $F=F_x=F_y=0$ теңдеулер жүйесін қолмен есептеп шешу мүмкін емес еді.

Ал компьютер үшін бұл қиындық тудырмайды. Тиісті командалар:

> $sol := solve(\{F(x,y), Fx(x,y), Fy(x,y)\}, \{x,y\})$:

> $allvalues(sol[1]); allvalues(sol[2]); allvalues(sol[3])[2]; allvalues(sol[3])[1];$

$$\left\{x = \frac{1}{2}, y = -\frac{1}{2}\right\}$$

$$\left\{x = -\frac{1}{2}, y = \frac{1}{2}\right\}$$

$$\left\{x = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}, y = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{5}\right\}$$

$$\left\{x = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}, y = \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}\right\}$$

Maple жүйесі $F = F_x = F_y = 0$ теңдеулер жүйесінің 4 жұп нақты шешімдері болатынын көрсетті. Қалған шешімдері комплекс сандармен беріледі. Жоғарыдағы тізімде жүйенің бірінші квадрантағы (яғни $x > 0, y > 0$ шарттарын орындайтын) шешімі жалғыз екенін байқаймыз. Демек, бірінші квадрантта қисықтың ерекше нүктесі де жалғыз болады:

> $x_0 := rhs(allvalues(sol[3])[1,1]); y_0 := rhs(allvalues(sol[3])[1,2]);$

$$x_0 := \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$$

$$y_0 := \frac{1}{4}\sqrt{5} - \frac{1}{4}$$

Табылған ерекше нүкте үшін (1) өрнегі мәнін табу:

$Fxx\_0 := simplify\big(subs\big(x = x_0, y = y_0, Fxx(x,y)\big)\big); Fyy\_0 := simplify\big(subs\big(x = x_0, y = y_0, Fyy(x,y)\big)\big); Fxy\_0 := simplify\big(subs\big(x = x_0, y = y_0, Fxy(x,y)\big)\big)$

$$Fxx\_0 := -81 + 27\sqrt{5}$$

$$Fyy\_0 := -81 + 27\sqrt{5}$$

$$Fxy\_0 := 81 - 27\sqrt{5}$$

> $\Delta := simplify\big(Fxx\_0 \cdot Fyy\_0 - Fxy\_0^2\big)$

$$\Delta := 0$$

$\Delta = F_{xx}^0 F_{yy}^0 - F_{xy}^0$ өрнегінің мәні нөлге тең шықты. Демек, қосымша зерттеулер қажет. Программаға функцияның үшінші ретті дербес туындыларын есептеуді тапсыруға тура келеді:

$Fxxx := \mathbf{proc}(x,y)\ \frac{\partial^3}{\partial x^3}F(x,y)\ \mathbf{end}$: $Fxyy := \mathbf{proc}(x,y)\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}F(x,y)\right)\ \mathbf{end}$:

$Fxxy := \mathbf{proc}(x,y)\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F(x,y)\right)\ \mathbf{end}$: $Fyyy := \mathbf{proc}(x,y)\ \frac{\partial^3}{\partial y^3}F(x,y)\ \mathbf{end}$:

Бұлардың өрнектелуін көрсетпей ақ, тек ерекше нүктедегі мәндерін келтіреміз:

$$Fxxx\_0 := 192 - 168\sqrt{5}$$
$$Fxyy\_0 := 336 - 24\sqrt{5}$$
$$Fxxy\_0 := 336 - 24\sqrt{5}$$
$$Fyyy\_0 := 192 - 168\sqrt{5}$$

Осыларды пайдаланып, $u = -\dfrac{F^0_{xy}}{F^0_{yy}}$ болғандағы (2) өрнегі мәнін есептейміз:

$> u := simplify\left(-\dfrac{Fxy\_0}{Fyy\_0}\right)$

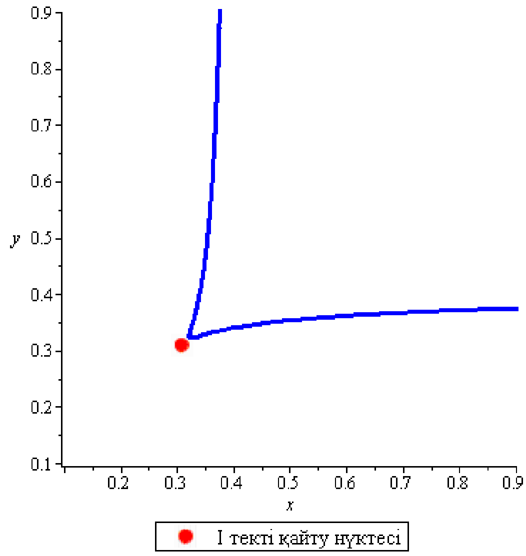
$$u := 1$$

$> V := Fxxx\_0 + 3 \cdot Fxxy\_0 \cdot u + 3 \cdot Fxyy\_0 \cdot u^2 + Fyyy\_0 \cdot u^3$

$$V := 2400 - 480\sqrt{5}$$

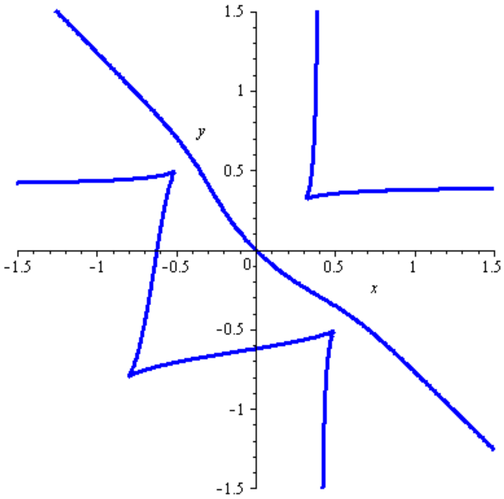
if $V \neq 0$ **then** *print*("І текті қайту нүктесі") **else** *print*("ІІ текті қайту нүктесі") **end if**

"І текті қайту нүктесі"



Сурет 3. (5) қисығының $x > 0, y > 0$ жағдайындағы ерекше нүктесі

Ескерту. (5) қисығын біз дербес $x > 0, y > 0$ жағдайында қарастырдық. Ал бүкіл $(x, y) \in R^2$ жазықтығында мұның басқа да 3 ерекше нүктесі бар екенін жоғарыда байқадық. Бұлардың типтері де- І текті қайту нүктелері екенін компьютерде тексеруге болады. Сондықтан мұнда тек қисықтың графигімен шектелеміз:



Сурет 4. $(x, y) \in R^2$ болғандағы (5) қисығы

Соңында мынадай қисық қарастырайық:

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0. \quad (6)$$

Қисықтың ерекше нүктесі жалғыз:

$$x_0 := 0$$

$$y_0 := 0$$

(1) өрнегінің мәні нөлге тең:

$$\Delta := 0$$

(2) өрнегінің де мәні нөлге тең:

> $u := -\frac{Fxy\_0}{Fyy\_0}$

$$u := 0$$

> $Fxxx(x, y); Fxxy(x, y); Fxyy(x, y); Fyyy(x, y)$

$$-60\,x^2 + 24\,x$$

$$-4$$

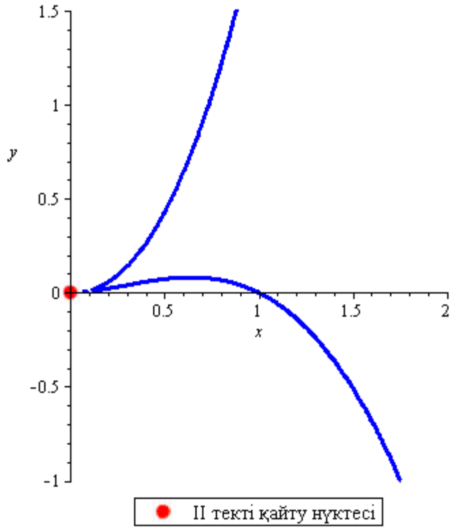
$$0$$

$$0$$

> $V := Fxxx\_0 + 3 \cdot Fxxy\_0 \cdot u + 3 \cdot Fxyy\_0 \cdot u^2 + Fyyy\_0 \cdot u^3$

$$V := 0$$

"II текті қайту нүктесі"



Сурет 5. (6) қисығының ерекше нүктесі

Қорытынды. Біз классикалық аналитикалық әдістерді компьютерде іске асыру жолдарын көрсеттік. Айқын емес функциялар арқылы берілген күрделі қисықтардың ерекшеліктерін және олардың типтерін табу есептерін біз ұсынған программаны қолданып, компьютерде жылдам және оңай есептеуге болатынына көз жеткіздік.

Алайда аналитикалық әдістер әмбебап болады деп ойлау қателескенге жатады. Ерекшеліктерді топологиялық идеяларға сүйеніп зерттеудің де әдістері бар. Топологияның идеялары кейде бастапқы қойылған есепті зерттеуге ыңғайлы қарапайым есепке алып келеді. Мысалы, аталған [5] мақаласында біз [6] жұмысы нәтижелеріне сүйене отырып, жоғары ретті күрделі беттерді және қисықтарды зерттеген болатынбыз.

Сондай-ақ, мұндағы программада үш еселі және одан да жоғары ретті ерекшеліктер жағдайы қарастырылмаған. Дегенмен, осындағы идеяларды ары қарай дамытып, мұндай есептерді де шығаруға болатындығына сенімдіміз. Демек, ұсынылған алгоритмдерді ары қарай жетілдіруге болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Рашевский, П.К. Курс дифференциальной геометрии [Текст] / П.К. Рашевский. - М: ГИТТЛ, 1950. - 428 с.
2. Fowler R.H. The elementary differential geometry of plane curves. - New York: Dover Publications, 2005. - 105 p.
3. Pressley A. Elementary differential geometry. - London: Springer-Verlag, 2010. - 473 p.
4. Borwein J.M., Skerritt M.P. An introduction to modern mathematical computing. With Maple. - New York: Springer, 2011. - 216 p.
5. Abiev N.A. On topological structure of some sets related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // Владикавказский математический журнал. - 2015. - №3(17). – С.5-13.
6. Брус, Дж. Кривые и особенности [Текст] / Дж. Брус, П. Джиблин. - М: Мир, 1988. – 262 с.

Материал редакцияға 15.03.21 түсті.

Н.А. Абиев, А.К. Сегизбаева

Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз, Казахстан

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КОМПЬЮТЕРНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ К КЛАССИФИКАЦИИ ОСОБЫХ ТОЧЕК ПЛОСКИХ КРИВЫХ

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы классификации особых точек плоских кривых. Предложены алгоритмы компьютерной классификации особых точек кривых. Осуществлены компьютерные реализации данных алгоритмов. Практическое применение разработки способствует сокращению объема ручного труда и ускорению процесса вычислений за счет компьютерных технологий.

Ключевые слова: плоская кривая, алгебраическая кривая, обыкновенная точка, особая точка, изолированная точка, точка самопересечения, точка возврата.

N.A. Abiev, A.K. Segizbaeva

M.Kh. Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

USING COMPUTER TECHNOLOGIES TO CLASSIFICATION SINGULAR POINTS OF PLANAR CURVES

Abstract. In the paper we consider questions related to the classification of singular points of planar curves. The main goal of the work is to reduce the volume of manual labor and accelerate the computation process due to computer technology. The paper proposes algorithms for computer classification of singular points of curves. Computer implementations of these algorithms have been carried out.

Keywords: planar curve, algebraic curve, ordinary point, singular point, isolated point, double point, cusp.

References

1. Rashevsky P.K. Kurs differentsial'noy geometrii [Course of differential geometry]. - Moscow: GITTL, 1950. - 428 p. [in Russian].
2. Fowler R.H. The elementary differential geometry of plane curves. - New York: Dover Publications, 2005. - 105 p.
3. Pressley A. Elementary differential geometry. - London: Springer-Verlag, 2010. - 473 p.
4. Borwein J.M., Skerritt M.P. An introduction to modern mathematical computing. With maple. - New York: Springer, 2011. - 216 p.
5. Abiev N.A. On topological structure of some sets related to the normalized Ricci flow on generalized Wallach spaces // Vladikavkaz Mathematical Journal. - 2015. - No. 3 (17). - P.5-13.
6. Brus J., Jiblin P. Krivyye i osobennosti [Curves and singularities]. - Moscow: Mir, 1988. - 262 p. [in Russian].