

FTAMP 30.17.23

Р.Ж. Наметкулова¹ – негізгі автор, | ©
А.К. Кадирибетова²

Аға оқытушылар

ORCID

¹<https://orcid.org/0000-0002-1658-152X>; ²<https://orcid.org/0000-0003-2839-6177>

М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті



Тараз қ., Қазақстан Республикасы

¹nametkulova65@mail.ru, ²aishafiz@mail.ru<https://doi.org/10.55956/FFEI3510>

ЕКІ КОНЦЕНТРЛІК СФЕРАЛАР АРАСЫНДАҒЫ ТҮТҚЫР ОРТАНЫҢ АҒЫСЫ

Аңдатпа. Екі концентрлік сфералардың біреуі тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналған кездегі тұтқыр пластикалық ортаның қозғалысы қарастырылған. Қойылған мәселені шешу үшін эвристикалық итерациялық әдіс қолданылды. Пайда болатын тоқырау аймақтарының шекарасы мен пішінінің ерекшеліктері анықталды. Ағыс сипатының ортаның параметрлеріне тәуелділігі алынды.

Тірек сөздер: тұтқыр орта, ағыс, деформация, кернеу, сфера, ағыс жылдамдығы.



Наметкулова, Р.Ж. Екі концентрлік сфералар арасындағы тұтқыр ортаның ағысы [Мәтін] / Р.Ж. Наметкулова, А.К. Кадирибетова // Механика және технологиялар / Ғылыми журнал. – 2022. – №1(75). – Б.5-11. <https://doi.org/10.55956/FFEI3510>

Кіріспе. Денелердің тұтқыр пластикалық ортада айналуын зерттеу бойынша бірқатар жұмыстар жүргізілген. Қарапайым осьтік симметриялық денелердің (цилиндр, конус, сфера) шексіз ортада стационар айналуы бойынша есеп [1]-жұмыста қарастырылған.

Бұл жұмыста екі концентрлік шеңбердің бірі тұрақты бұрыштық жылдамдықпен айналған кезде, олардың арасындағы тұтқыр пластикалық ортаның қозғалысы қарастырылады. Мұндай айналу, мысалы, ротациялық вискозиметрлерде тұтқыр пластикалық материалдарды зерттеуде орын алады.

Тұтқыр пластикалық ағыстың есептерін шешуде вариациялық [2] және эвристикалық [3] әдістер қолданылады. Мұндай есептерді шешуде вариациялық әдісті қолдану өте тиімді болып табылады, бірақ тұнбалық аймақ сияқты белгісіз шекаралар болған жағдайда, бұл қиындау. Сондықтан қойылған мәселені шешу үшін эвристикалық әдіс қолданылады. Оның басқа сандық шешу әдістерінен артықшылығы – итерациялық үрдістің әр қадамында бір екінші реттік қарапайым дифференциалдық теңдеуге арналған шекаралық есеп шығарылады. Сен-Венан параметрлерінің әртүрлі мәндерінде тұнбалық зоналардың шекаралары анықталып, оның формасының ерекшеліктері көрсетіледі.

Зерттеу шарттары мен әдістері. Сыртқы күштер әсер етпейтін сығылмайтын тұтқыр пластикалық ортаның екі концентрлі сфералар

арасындағы стационар қозғалысы сфералық координаттар жүйесінде қарастырылады. Радиусы r_2 сыртқы сфера қозғалмайды, ал радиусы r_1 ішкі сфера тұрақты ω_0 бұрыштық жылдамдықпен айналады.

Дененің айналысы жағдайында ортаның ағыс жылдамдығының тек қана бір құраушысы $v_\varphi = v(r, \theta)$ ғана нөлге тең болмайды. Тұтқыр пластикалық ортаның тұтқыр ағыс облысындағы күйінің теңдеуі келесі түрде беріледі:

$$\sigma_{nm} = \left(2\eta + \frac{\sqrt{2}\tau_0}{(\varepsilon_{kl}\varepsilon_{lk})^{\frac{1}{2}}} \right) \varepsilon_{ij} - p\delta_{ij}, \quad p = -\frac{\sigma_{nn}}{3},$$

мұндағы σ_{nm} – кернеудің тензоры, ε_{ij} – деформация жылдамдығының тензоры, η – тұтқырлық коэффициенті, τ_0 – аққыштық шегі.

Қарастырылып отырған жағдайда деформация жылдамдығы тензорының және кернеудің тензоряның келесі құраушылары нөлге тең болмайды:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{1}{2r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - v \cdot \operatorname{ctg} \theta \right), \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \left(2\eta + \frac{\tau_0}{(\varepsilon_{\theta\varphi}^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \varepsilon_{\theta\varphi}, \quad \sigma_{r\varphi} = \left(2\eta + \frac{\tau_0}{(\varepsilon_{\theta\varphi}^2 + \varepsilon_{r\varphi}^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \varepsilon_{r\varphi}, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -p. \end{aligned} \quad (1)$$

Ағыстың жылдамдығы мен бұрыштық жылдамдықтың арасындағы $v = r\omega(r, \theta)\sin\theta$ байланысты біле отырып, (1) формуланы келесі түрде жазуға болады:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\varphi} &= \frac{\omega_\theta \cdot \sin\theta}{2}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{r\omega_r \cdot \sin\theta}{2}, \\ \sigma_{\theta\varphi} &= \left(\eta \cdot \sin\theta + \frac{\tau_0}{(\omega_\theta^2 + r^2\varepsilon_r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \omega_\theta, \\ \sigma_{r\varphi} &= \left(\eta \cdot \sin\theta + \frac{\tau_0}{(\omega_\theta^2 + r^2\varepsilon_r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) r\omega_r, \\ \sigma_{rr} &= \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{\theta\theta} = -p. \end{aligned} \quad (2)$$

Енді сфералық координаттар жүйесіндегі тұтқыр пластикалық ортаның тепе-теңдік теңдеуін жазамыз:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial r} &= 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \end{aligned}$$

Соңғы өрнектер бойынша $p = p(\varphi)$ және $dp/d\varphi = const$. Қысымның $p(\varphi) = p(\varphi + 2\pi)$ периодтылық шартынан алатынымыз $dp/d\varphi = 0$, сондықтан

$$\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \operatorname{ctg} \theta) = 0, \quad (3)$$

Кернеудің тензорының құраушысының (2) мәнін (3)-ке қойып, сығылмайтын тұтқыр пластикалық орта қозғалысының сфералық координаттар жүйесіндегі дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$\eta \left(r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r} \omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} \right) + \frac{\tau_0}{\sin \theta} \times \\ \times \left(\frac{r\omega_{\theta}^2 \omega_{rr} + 4\omega_r \omega_{\theta}^2 + 3r^2 \omega_r^3 + r\omega_r^2 \omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r \omega_{\theta} \omega_{r\theta}}{(\omega_{\theta}^2 + r^2 \omega_r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\omega_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r(\omega_{\theta}^2 + r^2 \omega_r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0 \quad (4)$$

Алынған теңдеу $grad v \neq 0$ теңсіздігі орындалатын тұтқыр ағыс облысында ғана дұрыс болып табылады.

Егер ішкі сфераны аз бұрыштық жылдамдықпен айналдырса, онда ол сыртқы шекарасы Γ алдын ала берілмеген тұтқыр пластикалық ортаның шағын бөлігін қозғалысқа келтіреді. Ағыс облысының ішкі шекарасы Γ_0 айналыстағы сфераның беті болып табылады; ал Γ сыртқы шекарасының пішіні күрделі және есепті шешу барысында анықталуы керек. Шекарадан тыс жерде орта қатты дене сипатында болады және осы облысты тоқырау аймағы деп атайды.

Тоқырау аймағына жататын нүктелерде келесі теңдік орындалады:

$$grad v = 0. \quad (5)$$

Тоқырау аймағының шекарасындағы нүктелер үшін (5) шартты келесі түрде жазуға болады:

$$\frac{\partial v}{\partial n} = 0,$$

мұндағы n – тоқырау аймағының шекарасына тұрғызылған нормаль.

Жоғарыда баяндалған құбылыстың физикалық сипатын ескере отырып, келесі түрдегі шекаралық шарттарды аламыз:

$$\omega|_{\Gamma_0} = \omega_0, \quad \omega|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial n}|_{\Gamma} = 0. \quad (6)$$

Осылайша, ω функциясы дербес туындылардағы бейсызық дифференциалдық теңдеу үшін (4), (6) шеттік есептің шешімі болып табылады.

Енді өлшемсіз шамаларға өтейік. Ол үшін бұрыштық жылдамдықтың ω_0 шамасына, сызықтық өлшемдердің ішкі сфераның r_1 радиусына қатынасын аламыз.

Өлшемсіз айнымалылар үшін (4), (6) шеттік есеп келесі түрде беріледі:

$$r\omega_{rr} + 4\omega_r + \frac{1}{r} \omega_{\theta\theta} + \frac{3\omega_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r} + \frac{1}{H \sin \theta} \times \\ \times \left(\frac{r\omega_{\theta}^2 \omega_{rr} + 4\omega_r \omega_{\theta}^2 + 3r^2 \omega_r^3 + r\omega_r^2 \omega_{\theta\theta} - 2r\omega_r \omega_{\theta} \omega_{r\theta}}{(\omega_{\theta}^2 + r^2 \omega_r^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\omega_{\theta} \operatorname{ctg} \theta}{r(\omega_{\theta}^2 + r^2 \omega_r^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0; \quad (7)$$

$$\omega|_{\Gamma_0} = 1, \quad \omega|_{\Gamma} = 0, \quad \left. \frac{\partial \omega}{\partial n} \right|_{\Gamma} = 0. \quad (8)$$

мұндағы $H = \eta \omega_0 / \tau_0$ – өлшемсіз параметр. $S = H^{-1}$ – Сен-Венанның параметрі деп аталады.

(7), (8) шеттік есепті шешу үшін итерациялық әдісті қолданамыз. (7) теңдеудегі (r, θ) айнымалылардан келесі алмастырулар арқылы (ξ, χ) айнымалыларына өтеміз:

$$\xi = \xi(r, \theta), \quad \chi = \chi(r, \theta). \quad (9)$$

ξ айнымалыны енгізу кезінде ω -н χ бойынша туындысы мен аралас туындыларды басқа мүшелерімен салыстырғанда ескермеуге болады, себебі [2] әдіс бойынша ξ айнымалысы $\xi = const$ сызығы бойынша ω -н өзгерісі аз болатындай етіп таңдалады. Сонда ω функциясы екінші реттік қарапайым сызықтық дифференциалдық теңдеу үшін

$$\begin{aligned} & (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2) \omega_{\xi\xi} + (r^2 \xi_{rr} + 4r \xi_r + \xi_{\theta\theta} + 3\xi_\theta ctg\theta) \omega_\xi + \frac{1}{H \sin\theta} \times \\ & \times \left((r^2 \xi_\theta^2 \xi_{rr} + 4r \xi_r \xi_\theta^2 + 3r^3 \xi_r^3 + r^2 \xi_r^2 \xi_{\theta\theta} - 2r^2 \xi_r \xi_\theta \xi_{r\theta}) (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-3/2} \right. \\ & \left. + 2\xi_\theta ctg\theta (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-1/2} \right) = 0; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\omega|_{\xi=1} = 1, \quad \omega|_{\xi=0} = 0. \quad (11)$$

шеттік есептің шешімі болады.

(10) теңдеуді интегралдау кезінде χ айнымалысы параметр рөлін атқарады. (9) теңдеудегі нөлдік жуықтауды ξ^0 арқылы белгілейміз. (10), (11) есебін шешіп, $\omega^0(\xi^0, \chi)$ шамасын анықтаймыз. $\omega^0(\xi^0, \chi)$ шамасын ξ^1 арқылы белгілеп, келесі жуықтауды анықтау үшін (10), (11) есепке ұқсас (ξ^1, χ) айнымалылардағы шеттік есепті шешеміз. Келесі итерацияларды да осылай жасаймыз.

Егер әрбір қадамда $\chi = \theta$ деп алсақ, онда итерациялық процесс оңай жүзеге асырылады. χ айнымалысын осылай таңдап алсақ, керісінше (ξ, χ) айнымалыларынан (r, θ) айнымалыларына өткенде (10) теңдеу сызықтық дифференциалдық теңдеу болып қалады:

$$\begin{aligned} & \omega_{rr} + \left(4r \xi_r^2 - \frac{\xi_\theta^2 \xi_{rr}}{\xi_r} + \xi_r \xi_{\theta\theta} + 3\xi_r \xi_\theta ctg\theta \right) (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-1} + \frac{1}{H \sin\theta} \times \\ & \times \left((r^2 \xi_\theta^2 \xi_{rr} + 4r \xi_r \xi_\theta^2 + 3r^3 \xi_r^3 + r^2 \xi_r^2 \xi_{\theta\theta} - 2r^2 \xi_r \xi_\theta \xi_{r\theta}) (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-3/2} \right. \\ & \left. + 2\xi_\theta ctg\theta (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-1/2} \right) \xi_r^2 (\xi_\theta^2 + r^2 \xi_r^2)^{-1} \\ & = 0; \\ & \omega|_{\Gamma_0} = 1, \quad \omega|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

θ айнымалысы (12)-теңдеуіне параметр ретінде кіреді.

Есепті шешу үшін Эйткен әдісін [3] қолдануға негізделген схема қолданылады.

Зерттеу нәтижелері. Бұл жұмыста жүзеге асырылған таза ығысу жағдайында тұтқыр пластикалық ортаның деформациясы туралы есепті шешу үшін қолданылған.

Концентрлік сфералар арасындағы ортаның ағысын қарастырайық. (12), (13) шеттік есепті шешу үшін аталған әдісті қолданамыз. Нөлдік жуықтауды анықтау үшін келесі өрнекті қолданамыз:

$$\xi^0 = \frac{R_* - r}{R_* - r_1}, \quad \chi = \theta,$$

мұндағы $r = R_*(\theta)$ – Γ ағыс облысының сыртқы шекарасының контурының теңдеуі.

Жоғарыда айтылғандай тоқырау аймағы мен ағыс облысын бөлетін шекараның пішіні белгісіз. Оның бастапқы пішінін анықтау үшін келесі әдісті қолданамыз. $\omega_\theta = \omega_{\theta\theta} = \omega_{r\theta} = 0$ (7)-теңдеуге қойып, шекаралық шарттардың теңдеуін аламыз:

$$\omega_{rr} + \frac{4}{r}\omega_r - \frac{3}{Hr^2\sin\theta} = 0, \quad \omega|_{r=r_1} = 1, \quad \omega|_{r=R_*} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial n}\Big|_{r=R_*} = 0.$$

Бұл есепті еркімізше алынатын тұрақтыларды вариациялау әісімен шешіп, келесі түрдегі жылдамдықтың таралу формуласын аламыз:

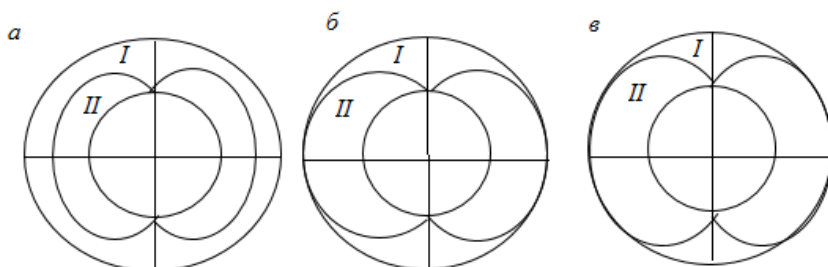
$$\omega = \frac{1}{3H\sin\theta} \left(\frac{R_*^3}{r^3} + 3\ln \frac{r}{R_*} - 1 \right),$$

Ағыстың таралу аймағының радиусы келесі трансцендентті теңдеудің шешімі болып табылады:

$$\frac{R_*^3}{r_1} - 3\ln \frac{R_*}{r_1} = 1 + 3H\sin\theta. \quad (13)$$

Ағыс облысын сыртынан шектейтін Γ контурдың бастапқы формасы ретінде (13) теңдеудің шешімін R_* алуға болады. Ағыс облысының ішінде $\omega_r < 0$ шарты орындалады. (12), (13) есептің θ -ң белгіленген мәніндегі шешімі баллистикалық әдіспен табылады.

Егер ағыс сыртқы сфераның шекарасына жететін болса, онда жылдамдықтың таралуын табу үшін сыртқы сфераның шекарасының сәйкес бөлігінде сырғанау жылдамдықтары нөлге айналу шартынсыз жаңа шектік есепті шешу керек. Жылдамдықтың таралуын тапқаннан кейін Γ ағыс облысының шекарасында $\frac{\partial\omega}{\partial r} = 0$ шартының орындалуын және шекараның пішінін анықтау үшін оның контурының деформациясын жасау керек.

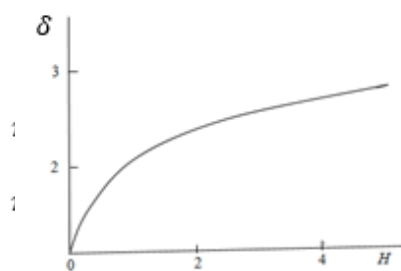


1-сурет. Екі концентрлік сфералық бет арасындағы тоқырау аймағының пішінінің N параметріне тәуелді өзгерісі

Ішкі сфераның бетіне әсер ететін үйкеліс күшінің моменті:

$$M = 2\pi \int_0^{\tau} \sigma_{r\varphi} \Big|_{\Gamma_0} R_1^3 \sin^2 \theta d\theta,$$

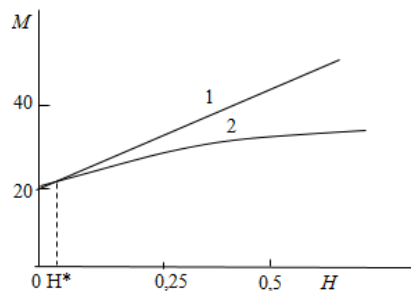
мұнда $\sigma_{r\varphi} = \left(1/(\omega_{\theta}^2 + r^2 \omega_r^2)^{\frac{1}{2}} + H \sin \theta \right) r \omega_r$ – жанама кернеу.



2-сурет. Ағыс облысының максимал радиусының экваторлық жазықтықтағы H параметріне тәуелділігі

және $H=H^*$ болғанда алғаш рет экваторда сыртқы сферамен жанасады (1,б-сурет). $H>H^*$ болғанда тоқырау аймағы екі симметриялық бөлікке – «солтүстік» және «оңтүстікке» бөлінеді (1,в-сурет). Әрбір облыстың шекарасы θ^* бұрышымен анықталады.

2-суретте θ^* бұрышының H параметріне тәуелділігі келтірілген. H-ң мәнін арттырғанда θ^* бұрышы кемиді, яғни тоқырау аймағының өлшемі кішірейеді. H параметрінің кез-келген мәнінде тоқырау аймағы сыртқы сфераның полюсімен бірігеді және сыртқы сферадан ішке қарай бағытталған конустәрізді пішінге ие болатынын айта кету керек. Бұл конустың ұшы ішкі сфераның полюсімен жанасады (1,в-сурет). Осылайша, берілген жағдайда H-ң кез-келген шектелген мәнінде сыртқы қозғалмайтын сфераның полюсінде тоқырау аймағы әрқашан болады.



3-сурет. Шектелген және шектелмеген орта үшін ішкі сфераға түсірілген M моменттің H параметрге тәуелділігі

сфераның айналуы туралы есепті қарастыруға болатыны анық. Осылайша, 3-суретте ағыс облысының максимал радиусының экваторлық жазықтықтағы, яғни $\theta^* = \pi/2$ болғандағы H параметріне тәуелділігін көрсеттік.

3-суретте шектелген және шектелмеген орта үшін ішкі сфераға түсірілген M моменттің H параметрге тәуелділігі келтірілген (сәйкесінше 1 және 2 қисықтар). $H \leq H^*$ мәндерінде бұл сызықтар беттеседі, ал $H > H^*$

Ғылыми нәтижелерді

талқылау. Алынған шешімнен келесі қорытындыны жасауға болады. I тоқырау аймағының бетінің пішіні H Сен-Венан параметрінің шамасымен сапалық байланыста болады. H қандай да бір H^* мәнінен кіші болатын аз бұрыштық жылдамдықтар жағдайында II-ортаның ағысының облысы сыртқы сферамен жанаспайтын ішкі сфера мен тоқырау аймағының арасында болады (1,а-сурет). Осы облыстың сыртында орта қатаң деформацияланбаған күйде болады. H параметрінің мәнін арттырғанда тоқырау аймағының шекарасы сыртқы сфераға жақындайды

Қорытынды.

Сыртқы сфера болмаған жағдайда шектелмеген тұтқыр пластикалық ортадағы

болғанда сыртқы сфера бар болғанда үйкеліс күшінің моменті шектелмеген ортадағы сфера айналысы жағдайындағыға қарағанда үлкен болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Любимов, Д.В. Движение вязкопластичной жидкости вблизи твердого тела [Текст] / Д.В. Любимов, А.В. Перминов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 1998. – №1. – С. 63-80.
2. Перминов, А.В. Устойчивость стационарного течения пленки вязкопластичной жидкости [Текст] / А.В. Перминов // Вестник ПГТУ. Прикладная математика и механика. – 2004. – №1. – С. 77-84.
3. Лойцянский, Л.Г. Механика жидкости и газа: учебник для вузов [Текст] / Л.Г. Лойцянский. – 7-е изд., испр. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.

Материал редакцияға 25.01.22 түсті.

Р.Ж. Наметкулова, А.К. КаDIRимбетова

Таразский региональный университет имени М.Х.Дулати, г.Тараз, Казахстан

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ СРЕДЫ МЕЖДУ ДВУМЯ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ

Аннотация. Представлены результаты теоретических исследований движения вязкой пластической среды между двумя концентрическими сферами в случае вращения одной из них с неизменной угловой скоростью. При решении использован эвристический итерационный метод. Определены граничные условия и характерные формы застойных областей. Выявлена зависимость параметров течения от величин, описывающих среду.

Ключевые слова: вязкая среда, течение, деформация, напряжение, сфера, скорость течения.

R.Sh. Nametkulova, A.K. Kadirimbetova

M.Kh.Dulaty Taraz Regional University, Taraz, Kazakhstan

THE FLOW OF A VISCOUS MEDIUM BETWEEN TWO CONCENTRIC SPHERES

Abstract. A theoretical study of the motion of a viscous plastic medium between two concentric spheres in the case of rotation of one of them with a constant angular velocity is given. The solution uses a heuristic iterative method. Boundary conditions and characteristic forms of stagnant areas are determined. The dependence of the flow parameters on the quantities describing the medium is revealed.

Keywords: viscous medium, flow, deformation, stress, sphere, flow velocity.

References

1. Lyubimov D.V., Perminov A.V. Dvizhenie vjaskoplastichnoj zhidkosti vblizi tverdogo tela [The motion of a viscoplastic fluid near a solid body] // Vestnik PGTU. Prikladnaja matematika i mehanika [Bulletin PSTU. Applied Mathematics and Mechanics]. 1998 - 30. - No. 1. - pp. 63-80. [in Russian].
2. Perminov A.V. Ustojchivost' stacionarnogo techenija plenki vjaskoplastichnoj zhidkosti [Stability of stationary flow of a viscoplastic liquid film] // Vestnik PGTU. Prikladnaja matematika i mehanika [Bulletin PSTU. Applied Mathematics and Mechanics]. - 2004 - No. 1. - pp. 77-84. [in Russian].
3. Loitsyansky L.G. Mehanika zhidkosti i gaza [Mechanics of liquid and gas]: textbook for universities. 7th ed., chang. - Moscow: Drofa, 2003. - 840 p. [in Russian].