DEEP MODELING FOR CYBER SECURITY: CHALLENGES AND PROSPECTS FOR THE APPLICATION OF DATA SCIENCE

Abstract. The paper considers the importance of intelligent cyber security applications and contemporary problems and features of data science (big data, data mining, knowledge discovery, advanced analytics, web mining, text mining), and other intelligent data processing systems. The novel results in all of the quoted fields rely on realizations of autonomous systems, applications of data-driven methods, fusion of statistical and logical results, deep processing of accumulated knowledge, etc. The intelligent technologies advance the efficiency of statistical applications in one evolutionary process. Novel results had been elaborated for evolutionary methods supporting the fusion process in the logical-and-statistical complex. It is shown how data science methods can improve the quality of many contemporary applications in the cyber security fields. All the quoted advantages may be successfully combined with classical and other known applications.It is demonstrated that without the described research innovations the main cyber security shortcomings from the considered contemporary intelligent systems couldn't be completely resolved.

Keywords: DataSceince, Cyber Security, Autonomous System, Software Agent, Intelligent Systems

МРНТИ 27.35.31

М.Ж. Жумабаев[1](Orcid - 0000-0001-9780-028X),
С.К. Карауылбаев[2], (Orcid- 0000-0003-0241-0284),
Г.И. Туреханова[3] (Orcid - 0000-0003-0801-8988),
М.Б. Сламкулова[4](Orcid - 0000-0002-1642-4129).

Д.ф.м.н., профессор[1], PhD, доцент[2], магистр математики, старший преподаватель[3], магистр информационных систем, преподаватель[4]
[1,2,3,4]Таразскийрегиональный университет имени М.Х. Дулати, г. Тараз, Казахстан
mjandarbek49@gmail.com[1], karauylbaev.s.k@gmail.com[2] tyrekhanova@gmail.com[3], slamkulova.markhabat@gmail.com[4]

ОСЕСИМЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА НАПРЯЖЕННОСТИ ЦИЛИНДРА

Аннотация. В различныхрассматривается полый цилиндр. Заданы граничные условия на внутренней и внешней поверхностях. Система дифференциальных уравнений сводится к одному уравнению. Решение отыскивается в виде суммы четырех решений $u = f^{(1)}(\xi)e^{\lambda\eta} + f^{(2)}(\xi)e^{-\lambda\eta} + f^{(3)}(\xi)\cos\lambda\eta + f^{(4)}(\eta)\sin\lambda\eta, f^{(i)}(\eta)$ - неизвестные функции, λ– некоторое действительное число. Следовательно, получение решений дифференциальных уравнений с кусочно-непрерывными коэффициентами, разработка эффективных численно-аналитических методов и алгоритмов расчета линейных и нелинейных деформаций, основанных на базе пространственных подходов, позволяющих оценить напряженно-деформированного состояния и устойчивость формы равновесия, а также уровни остаточных напряжений в многослойных цилиндрических телах из изотропных, трансверсально-изотропных и ортотропных материалов, находящихся в температурном поле под действием механических нагрузок внутреннее давление, внешняя нагрузка, осевое сжатие и центробежные силы.

Ключевые слова:дифференциальное уравнение, изотропный цилиндр, уравнения Бесселя, оператор Лапласа, частные решение для радиального перемещения.

Введение. Теория упругости анизотропных тел были рассмотрены в исследованиях С.Г.Лехницкого [1], Ю.Н.Подильчука [2], Н.И.Безухова [3], вместе с тем задачи осесимметричной деформации многослойного цилиндрического толстостенного цилиндра [4; 5] требуют дополнительного подхода к решению задачи.

В решении осесимметричнойзадачи напряженности цилиндра мы предлагаем выделить граничные условия.

Рассматривается полый цилиндр конечной длины ℓс внутреннимr=a, внешним r=bрадиусами. Материал цилиндра изотропный.

На внутренней и внешней поверхностях заданы

$\sigma = q(z), \sigma_{rz} = r(z)$приr = a (1)

$u = u(z), w = w(z)$ при r = b

На торцах цилиндра рассматриваются следующие граничные условия

а) $u_1 = u_3 = 0$при $z = 0, \quad z = \ell$ (2а)

б) $u = w = 0$при $z = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad \sigma_{rz} = 0$ при $z = \ell$ (2б)

в) $\sigma_z = 0, \sigma_{rz} = 0$ при$z = 0, z = \ell,$ (2в)

Уравнения равновесия изотропного цилиндра имеют вид [1]

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2v}\frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = 0, \tag{3}$$

где $\nabla^2(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\dots)}{\partial r} + \frac{\partial^2(\dots)}{\partial z^2}, \ \ \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}.$ (*)

Компоненты тензора напряжений связаны с компонентами перемещений

$$\sigma_r = \frac{E}{1-v^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + v\left(\frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right], \sigma_\varphi = \frac{E}{1-v^2}\left[\frac{u}{r} + v\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-v^2}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + v\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)\right], \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1-v^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right). \tag{4}$$

Выводятся следующие безразмерные параметры:

$$\xi = \frac{r}{b}, \ \ \eta = \frac{z}{b}, \ \ u_1 = \frac{u}{b}, u_3 = \frac{w}{b} \tag{5}$$

Система дифференциальных уравнений равновесия (3.3) сводится к одному уравнению относительно u_1

$$\Delta\Delta\, u_1 + 2\,\Delta \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = 0 \tag{6}$$

где

$$\Delta\,(\dots) = \frac{\partial^2(\dots)}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial(\dots)}{\partial \xi} - \frac{1}{\xi^2} \tag{7}$$

При этом функция u_3(связанная с продольной компонентной перемещений) определяется двумя квадратурами$u_3 = -\int\int \left[2(1-v)\,\Delta\, u_1 + (1-2v)\frac{\partial_1\, u_1}{\partial \eta^2}\right] d\xi d\eta + f_1^*(\eta) + f_2^*(\eta) + f_2^*(\xi)$ (8)

где$f_1^*(\eta), f_2^*(\xi)$– произвольные функции интегрирования.

Решение уравнения (3.6) отыскивается в виде суммы четырех решений

$$u_1 = f^{(1)}(\xi)e^{\lambda\eta} + f^{(2)}(\xi)e^{-\lambda\eta} + f^{(3)}(\xi)\cos\lambda\eta + f^{(4)}(\eta)\sin\lambda\eta, \tag{9}$$

Условия и методы исследований. В котором $f^{(i)}(\eta)$– неизвестные функции, а множителями при них является система линейно-независимых базисных функций, позволяющая разделить переменные как в уравнении равновесия (3.6), так и в граничных условия, а λ–некоторое действительное число.

Подставляя решение (3.9) в уравнение (3.6) и приравняв нулю коэффициенты при базисных функциях, можно получить уравнения для определения функции $f^{(i)}(\eta)$

$$\Delta\Delta\, f^{(i)} + 2k_i\lambda^2\,\Delta\, f^{(i)} + \lambda^4 f^i = 0, \qquad (10)$$

в которых $k_i = 1$при $i = 1{,}2$,и $k_i = -1$при i = 3,5.

Если учесть (3.7), то уравнения (3.10) можно привести к виду

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{\xi^2} + k_i\lambda^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{1}{\xi^2} + k_i\lambda^2\right)f^{(i)} = 0 \qquad (11)$$

Если в качестве независимой переменной выбрать переменную x, связанную с ξзависимостью

$$x = \lambda\xi, \qquad (12)$$

То при условии, что λ отлично от нуля, уранение (3.11) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + k_i\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + k_i\right)\mathfrak{f}^{(i)}(x) = 0 \qquad (13)$$

Линейно-независимые решения уравнения Бесселя $(k_i = 1)$ и модифицированного уравнения Бесселя $(k_i = -1)$ первого рода

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + k_i\right)\mathfrak{f}^{(i)}(x) = 0 \qquad (14)$$

даются функциями Бесселя действительного $(I_1, Y_1 \text{при} K_1 = 1)$ и мнимого $(\dot{I}_1, K_1 \text{при} k_i = -1)$ аргументов.

Два других решения (11) при определенномk_i следует искать как частные решения уравнений

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} + 1\right)\tilde{\mathfrak{f}}^{(i)}(x) = C_1 I_1(x) + C_2 I_1(x), \qquad (15)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2} - 1\right)\tilde{\mathfrak{f}}^{(i)}(x) = C_3 \dot{I}_1(x) + C_4 \widetilde{K}_1(x) \qquad (16)$$

Решение уравнение (14) отыскивается в виде

$$\tilde{\mathfrak{f}}^{(i)}(x) = \tilde{C}_1 I_1(x) + \tilde{C}_2 Y_1(x) \qquad (17)$$

в котором предполагается, что $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$являются такими функциями x, что они соответствуют правой части. Методом вариации произвольных постоянных [2] можно получать, что

$$\tilde{C}_1 = C_1 - C_3\int_{x_1}^{x} x I_1 Y_1 dx - C_4\int_{x_1}^{x} x Y_1^2\, dx, \tilde{C}_2 = C_2 + C_3\int_{x_1}^{x} I_1^2 dx + C_4\int_{x_1}^{x} x I_1 Y_1 dx \qquad (18)$$

Откуда

$$\mathfrak{f}^{(i)}(x) = C_1^i I_1 + C_2^i + C_3^i\left(-I_2\int_{x_1}^{x} x I_2 Y_1 dx + Y_1\int_{x_1}^{x} x I_1^2 dx\right) + C_4^i\left(-I_1\int_{x_1}^{x} x Y_1^2\, dx + Y_1\int_{x_1}^{x} I_1\, Y_1 dx\right) \qquad (19)$$

при i=1,2.

Аналогично находится решение уравнения (16). Для этого уравнения получается

$$\mathfrak{f}^{(i)}(x) = C_1^i \dot{I}_1 K_1 + C_2^i + C_3^i\left(\dot{I}_2\int_{x_1}^{x} x\dot{I}_2 K_1 dx + K_1\int_{x_1}^{x} x\dot{I}_1^2 dx\right) + C_4^i\left(\dot{I}_1\int_{x_1}^{x} x K_1^2\, dx + K_1\int_{x_1}^{x}\dot{I}_1\, K_1 dx\right) \qquad (20)$$

при i=3,4.

Таким образом, решение уравнения (11) может быть записано в виде

$$f^{(i)}(\xi) = f^{(i)}\left(\frac{x}{\lambda}\right) = \sum_{k=1}^{4} C_k^i \psi^k(x) \quad (21)$$

в котором

$$\begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^3 \\ \psi^2 & \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 - I_1 \int_{x_1}^{x} x I_1 Y_1 dx + Y_1 \int_{x}^{x} x I_1^2 dx \\ Y_1 - I_1 \int x Y_1^2 dx + Y_3 \int_{x_1}^{x} x I_1 Y_1 dx \end{bmatrix} \quad (22)$$

При i=1,2 и

$$\begin{bmatrix} \psi^1 & \psi^3 \\ \psi^2 & \psi^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 I_1 \int_{x_1}^{x} x I_1 K_1 dx - K_1 \int_{x}^{x} x I_1^2 dx \\ K_1 I_1 \int_{x_1}^{x} x K_1^2 dx - K_1 \int_{x_1}^{x} x I_1 K_1 dx \end{bmatrix} \quad (23)$$

При i=3,4.

В последующем будут необходимы равенства

$$\bar{\Delta}\psi^k = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{x^2}\right)\psi^k \quad (24)$$

И в соответствии с равенствами (22) и (23) можно написать, что

$$\bar{\Delta}\psi^k = -\psi^k + \left(\delta_3^k + \delta_4^k\right)\frac{2}{\pi}\psi^{k-2} \quad (25)$$

При i=1,2 и

$$\bar{\Delta}\psi^k = \psi^k + \left(\delta_3^k + \delta_4^k\right)\psi^{k-2} \quad (26)$$

При i=3,4. В соотношениях δ_i^j – символ Кронекера.

При этом

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1, \text{если} i = j \\ 0, \text{если} i \neq j \end{cases}$$

Если подставить решение (21) в (9), то функцию радиального перемещения u_1 можно записать в виде

$$u_1 = \sum_{k=1}^{4} \sum_{i=1}^{4} C_k^i \varphi_i(\lambda\eta)\psi^k(x) \quad (27)$$

где $\varphi_1(\lambda\eta)$ – базисные функции

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (e^{\lambda\eta}, e^{-\lambda\eta}, \cos\lambda\eta, \sin\lambda\eta) \quad (28)$$

Результаты исследований.Чтобы определить продольную координату перемещения u_3, нужно в соотношение (8) подставить найденную функцию u_1 из (27). Предварительно следует найти подинтегральное выражение

$$\left[2(1-v)\Delta + (1-2v)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right]u_1 = \left[\lambda^2 2(1-v)\bar{\Delta} + (1-2v)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right]u_1 \quad (29)$$

где $\bar{\Delta}(\dots)$ – оператор Лапласа нулевого порядка по координате x. Подставив в (29) выражение u_1 из (26), а также имея в виду, что

$$\frac{d^2\varphi_1(\lambda n)}{dn^2} = \lambda^2 k_1 \varphi_1(\lambda n) \quad (30)$$

можно получить

$$\left[2(1-\nu)\Delta + (1-2\nu)\frac{\partial^2}{\partial n^2}\right]u_1 = \lambda^2 \sum_{k=1}^{4} \sum_{k=1}^{4} c_k^i \varphi_i(\lambda n)\left[2(i-\nu)\Im\psi_k^k + k_1(1-2\nu)\psi^n\right] \quad (31)$$

в полученном выражении введен обозначение

$$\frac{dg^k(x)}{dx} = 2(1-\nu)\bar{\Delta}\psi^2 + k_1(1-2\nu)\psi^4 \quad (32)$$

при этом, если учесть равенства (3.25), (3.26), то последнее выражение можно записать в виде

$$\frac{dg^k(x)}{dx}=\begin{cases}-\psi^k+\dfrac{4(1-\nu)}{\pi}(\delta_3^k+\delta_4^k)\psi^{k-2}, & k=1,2\\ \psi^4+2(1-\nu)(\delta_3^k+\delta_4^k)\psi^{k-2}, & k=3,4\end{cases} \tag{33}$$

В этих обозначениях продольная компоненты перемещения u_1 записывается в виде

$$u_3=-\iint\lambda^2\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}c_k^i\varphi_i(\lambda\eta)\frac{dg^4(x)}{dx}d\xi d\eta+f_1^*(\eta)+f_2^*(\xi) \tag{34}$$

в силу (12)

$$\int\frac{dg^k(x)}{dx}d\xi=\frac{1}{\lambda}\int\frac{dg^k(x)}{dx}dx=\frac{1}{\lambda}g^k(x), \tag{35}$$

а выражения (30) позволяет найти второй интеграл

$$\int\varphi_1(\lambda\eta)d\eta=\frac{k_i}{\lambda^2}\int\frac{d^2\varphi_1(\lambda\eta)}{d\eta^2}d\eta=\frac{k}{\lambda^2}\frac{d_i(\lambda\eta)}{d\eta}=\frac{k_1}{\lambda^2}\psi,(\lambda\eta) \tag{36}$$

последние два равенства позволяют написать функцию u_3 в виде

$$u_3=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}c_k^i k_i\varphi_i(\lambda\eta)g^k(x)+f_1^*(\eta)+F_2^*\left(\frac{x}{\lambda}\right) \tag{37}$$

где под $\dot{\varphi}(\lambda\eta)$ подразумевается производная этой функции по η.

Для реализации единственности решения задачи с однородными граничными условиями на торцах $\mathrm{z}=0,\mathrm{z}=1$ $(\eta=0,\eta=\eta_1)$ необходимо наложить на функцию $f_i^*(\eta)$ условие

$$f_i^*(\eta)=0. \tag{38}$$

Вторую произвольную функцию интегрирования $f_2(x)$ удобно отыскивать в виде

$$f_2(x)=-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{4}\sum_{i=1}^{4}k_iA_i^kg^k(x) \tag{39}$$

где A_i^k - постоянные числа, подлежащие определению.

При условиях (3.38),(3.39) продольная компонента перемещения u_3 записывается в виде

$$u_3=-\tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^4\sum_{i=1}^4 k_i\left[C_k^i\varphi_i(\lambda\eta)-A_k^i\right]g^k(x) \tag{40}$$

Определенные компоненты перемещения u_1,u_3 (см.(3.27),(3.37)) позволяет найти компоненты деформации

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\varphi\\ \varepsilon_z\end{bmatrix}=\lambda\textstyle\sum_{k=1}^4\sum_{i=1}^4 C_k^i\varphi_i(\lambda\eta)\begin{bmatrix}\frac{d\psi^k(x)}{dx}\\ \frac{\psi^k(x)}{x}\\ -g^k(x)\end{bmatrix} \tag{41}$$

$$\varepsilon_{rz}=\textstyle\sum_{k=1}^4\sum_{i=1}^4(C_k^{*i}\varphi_i-A_k^{*i})\psi^k \tag{42}$$

В (42) введены обозначения

$$C_k^{*i}=\begin{cases}2C_k^i-\frac{4(1-\vartheta)}{\pi}C_{k+2}^i\left(\delta_3^{k+2}+\delta_4^{k+2}\right), & i=1,2\\ 2C_k^i+2(1-\vartheta)C_{k+2}^i\left(\delta_3^{k+2}+\delta_4^{k+2}\right), & i=3,4\end{cases} \tag{43}$$

$$A_k^{*i} = \begin{cases} 2C_k^i - \frac{4(1-\upsilon)}{\pi} A_{k+2}^i\left(\delta_3^{k+2} + \delta_4^{k+2}\right), \; i = 1,2 \\ 2A_k^i + 2(1-\upsilon)A_{k+2}^i\left(\delta_3^{k+2} + \delta_4^{k+2}\right), \; i = 3,4 \end{cases} \quad (44)$$

Зная компоненты деформационного состояния легко найти компоненты напряженного состояния в соответствии с физическими соотношениями. Они могут быть написаны в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_\eta \end{bmatrix} = \lambda \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda\eta) \begin{bmatrix} S_\xi^k \\ S_\varphi^k \\ S_\eta^k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_\eta \end{bmatrix} = \frac{1-\upsilon^2}{E} \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\varphi \\ \sigma_z \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^4 \sum_{k=1}^4 (C_k^{*i}\varphi_i - A_k^{*i})\psi^k, \sigma_{\xi\eta} = \frac{(1-\upsilon)}{2E}\sigma_{rz}$$

В соотношениях (45) принято

$$\begin{bmatrix} s_\xi^k \\ s_\varphi^k \\ s_\eta^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\psi^k}{dx} + \upsilon\left(\frac{\psi^k}{x} - q^k\right) \\ \frac{\psi^k}{x} + \upsilon\left(\frac{d\psi^k}{dx} + q^k\right) \\ -q^k + \vartheta\left(\frac{d\psi^k}{dx} + \frac{\psi^{i^k}}{x}\right) \end{bmatrix} \quad (46)$$

В полученные соотношения входят неизвестные C_k^i (k=1,2,3,4, i=1,2, …) которые должны быть определены из граничных условий на боковых поверхностях цилиндра.

Обсуждение научных результатов.Рассматриваются граничные условия на торцах цилиндра. Граничные условия на торцах цилиндра позволяют конкретизировать неизвестный параметр λ. В зависимости от вида закрепления торцов цилиндра найденные выражения компонентов перемещения, деформаций и напряжений принимают ту или иную конкретную форму.

Торцы цилиндра жестко закреплены. При этих условиях полученные решения должны удовлетворять условиям

$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda * 0)\psi^k(x) = 0$$
$$\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 C_k^i \varphi_i(\lambda\eta_1)\zeta^k(x) = 0 \quad (47)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i\left[C_k^i \dot{\varphi}(\lambda * 0) - A_k^i\right]q^k(x) = 0 \quad (48)$$

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^4 k_i\left[C_k^i \dot{\varphi}(\lambda\eta_1) - A_k^i\right]q^k(x) = 0$$

Так как функций $\psi^k(x)$,$q^k(x)$, (k = 1, 2, 3, 4) является линейно независимыми, а системы уравнений (47), (48) должны удовлетворяться в произвольной точке x по радиусу торцевого сечения цилиндра, то для выполнения указанных условий необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при каждой из указанных функций обращались в нуль. Если кроме указанных учитывать, что функций $\psi^k(x)$,$q^k(x)$ попарно равны при i=1, 2 иi=3, 4, то системы уравнений относительно неизвестных постоянных C_k^i

$$C_k^1 + C_k^2 = 0$$
$$C_k^1 e^{\lambda\eta_1} + C_k^2 e^{-\lambda\eta_1} = 0 \quad (49)$$
$$C_k^1 - C_k^2 - A_k^1 - A_k^2 = 0$$

k=1,2,3,4при i=1,2

$$C_k^3 = 0$$
$$C_k^3 cos\lambda\eta_1 + C_k^4 sin\lambda\eta_1 = 0$$
$$C_k^4 - A_k^3 - A_k^4 = 0 \quad (50)$$
$$C_k^3 \sin\lambda\eta_1 - C_k^4 \cos\lambda\eta_1 + A_k^3 + A_k^4 = 0$$

k=1, 2, 3, 4 приi=3, 4

Однородная система уравнения (49) имеет только нулевое решение

$$C_k^1 = C_k^2 = A_k^1 = A_k^2 = 0 \quad (51)$$

Система уравнений (50) может иметь ненулевое решение, если

$$\sin\lambda\eta_1 = 0 \quad (52)$$

то есть при значениях параметра λ, равных

$$\lambda = \lambda_j = \frac{j\pi}{2}, \text{ j=1, 2, …} \quad (53)$$

При указанных условиях последние два уравнения (50) совпадают, если только

$$\cos\lambda\eta_1 = 1 \quad (54)$$

Откуда следует, что значения j в (53) должны быть только четными. Таким образом,

$$\lambda = \lambda_j = \frac{2j\pi}{\eta_1}, \text{ j=1, 2, …} \quad (55)$$

Если λ выбрано из соотношения (55), то, пологая постоянные A_k^3,A_k^4 равными, можно получить, что

$$A_k^3 = A_k^4 = \frac{1}{2} C_k^4 \quad (56)$$

Заключение.Таким образом, при однородных в смысле перемещения условиях на торцах цилиндра частные решение для радиального перемещения получается в виде

$$u_1 = \sum_{k=1}^{4} C_k^4 \sin(\lambda_j\eta)\psi^k(x) \quad (57)$$

Общее решение найдется как суперпозиция решений вида (57), то есть

$$u_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{4} C_k^j \psi^k(x) \sin(\lambda_j\eta) \quad (58)$$

Здесь уместно отметить, что с ростом номера jпараметр λ_j растет. Поэтому сходимость ряда (58) будет обеспечена, если только

$$\left|C_k^j \psi^k(x)\right| \le M$$

Где M – некоторое конечное число.

Если радиальная компонента перемещения u_1 определяется из (58), то продольная компонента перемещения u_3 в силу (56) принимает вид

$$u_3 = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{4} (\cos\lambda_1\eta - 1) q^k(x) \quad (59)$$

Теперь, в силу соотношений (41)-(46) компоненты деформации и напряжений определяются

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_r\\ \varepsilon_\varphi\\ \varepsilon_z\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_k^j \sin\lambda_j\eta \begin{bmatrix}\frac{d\psi^k}{dx}\\ \frac{\psi^k}{x}\\ -g^k\end{bmatrix} \quad (60)$$

$$\varepsilon_{rz} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}\left[C_k^{*j}(\lambda_j\cos(\lambda_j\eta)-1)+C_k^j\right]\psi^k$$

где $C_k^{*j} = 2[C_k^j + (1-\upsilon)C_{k-2}^j(\delta_3^{k+2}+\delta_4^{k+2})]$ (61)

$$\begin{bmatrix}\sigma_\xi\\ \sigma_\varphi\\ \sigma_\eta\end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4} C_k^j\lambda_j\sin(\lambda_j\eta)\begin{bmatrix}S_\xi^k\\ S_\varphi^k\\ S_\eta^k\end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\sigma_{\xi\eta} = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{4}\left[C_k^{*j}(\lambda_j\cos(\lambda_j\eta)-1)+C_k^j\right]\psi^k$$

Список литературы

1. Лехницкий, С.Г. Теория упругости анизотропного тела[Текст]/С.Г. Лехницкий. – Москва: Наука, 1977. – 415с.
2. Безухов, Н.И. Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур[Текст] / Н.И. Безухов, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат [и др.] – М.: Машиностроение, 1965. – 567 с.
3. Подильчук, Ю.Н. Трехмерные задачи теории упругости[Текст] / Ю.Н. Подильчук. – Киев.:Наукова думка, 1979. – 240 с.
4. Албакасов, А.И. Осесимметричная деформация многослойного цилиндрического толстостенного цилиндра МКЭ. Прочность и разрушение материалов и конструкций[Текст]/ А.И. Албакасов М.И. Климов. –Орск.: изд-во Орского университета, 1998. –С.58-59.
5. Матвеев, Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений[Текст] / Н.М. Матвеев. – М.: Высшая школа, 1967. – 563 с.

Материал поступил в редакцию 13.06.21.

М.Ж. Жумабаев, С.К. Карауылбаев, Г.И. Туреханова, М.Б. Сламкулова

М.Х. Дулати атындағы Тараз өңірлік университеті,Тараз қ., Қазақстан

ОСЬТІК СИММЕТРИЯЛЫҚ ЦИЛИНДР КЕРНЕУІНІҢ ЕСЕБІ

Аннотация.Мақалада қуыс цилиндр қарастырылды. Ішкі және сыртқы беттердегі шектік шарттар берілген. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі бір теңдеуге дейін қысқартылады. Шешім$u = f^{(1)}(\xi)e^{\lambda\eta} + f^{(2)}(\xi)e^{-\lambda\eta} + f^{(3)}(\xi)\cos\lambda\eta + f^{(4)}(\eta)\sin\lambda\eta$, төрт шешімнің қосындысы ретінде ізделеді, $f^{(i)}(\eta)$- белгісіз функциялар, λ–кейбір нақты сандар.Демек, дифференциалдық теңдеулердің үздіксіз бөлшектелген коэффициенттері бар шешімдерін алу, кеңістіктік тәсілдерге негізделген сызықтық және сызықтық деформацияларды есептеудің тиімді сандық және аналитикалық әдістері мен алгоритмдерін құру, тепе-теңдік күйін және тепе-теңдік формасының тұрақтылығын бағалауға мүмкіндік береді. Механикалық жүктемелер әсерінен температуралық өрістегі изотропты, көлденең изотропты және ортотропты материалдардан жасалған көп қабатты цилиндрлік денелердегі қалдық

кернеулердің деңгейі ретінде: ішкі қысым, сыртқы жүктеме, осьтік сығылу және центрифугалау күштері есептелінеді.

Тірек сөздер: Дифференциалдық теңдеу, изотропты цилиндр, Бессель теңдеулері, Лаплас операторы, радиалды қозғалысқа арналған жеке шешімдер.

M.Zh. Zhumabaev, S.K. Karauylbayev, G.I. Turekhanova, M.B. Slamkulova[4]

Taraz Regional University named after M.Kh. Dulaty, Taraz, Kazakhstan

AXISYMETRIC CYLINDER TENSION PROBLEM

Annotation. A hollow cylinder is considered. Boundary conditions are set on the inner and outer surfaces. The system of differential equations is reduced to one equation. The solution is sought in the form of the sum of four solutions $u = f^{(1)}(\xi)e^{\lambda\eta} + f^{(2)}(\xi)e^{-\lambda\eta} + f^{(3)}(\xi)\cos\lambda\eta + f^{(4)}(\eta)\sin\lambda\eta$, $f^{(i)}(\eta)$ are unknown functions, λ– is some real number.Consequently, obtaining solutions of differential equations with piecewise continuous coefficients, developing effective numerical and analytical methods and algorithms for calculating linear and nonlinear deformations based on spatial approaches that make it possible to assess the stress-strain state and stability of the equilibrium shape, as well as the levels of residual stresses in multilayer cylindrical bodies made of isotropic, transversely isotropic and orthotropic materials in a temperature field under the action of mechanical loads: internal pressure, external load, axial compression and centrifugal forces.

Key words: differential equation, isotropic cylinder, Bessel equations, Laplace operator, particular solution for radial displacement.

References

1. Lekhnickij, S.G. Teoriya uprugosti anizotropnogo tela [The theory of elasticity of an anisotropic body]. – Moscow: Nauka, 1977. – 415 p. [inRussian]
2. Bezuhov, N.I.,Bazhanov,V.L., Gol'denblat, I.I. i dr. Raschety na prochnost', ustojchivost' i kolebaniya v usloviyah vysokih temperatur [Calculations for strength, stability and vibrations at high temperatures]. – Moscow: Mashinostroenie, 1965. – 567 p.[inRussian]
3. Podil'chuk, YU.N. Trekhmernye zadachi teorii uprugosti [Three-dimensional problems of elasticity theory]. – Kiev: Naukova dumka, 1979. – 240 p. [inRussian]
4. Albakasov, A.I., Klimov,M.I. Osesimmetrichnaya deformaciya mnogoslojnogo cilindricheskogo tolstostennogo cilindra MKE. Prochnost' i razrushenie materialov i konstrukcij [Axisymmetric deformation of a multilayer cylindrical thick-walled cylinder by the finite element method. Strength and destruction of materials and structures]. – Orsk: izd-vo Orskogo universiteta, 1998. – P. 58-59. [inRussian]
5. Matveev, N.M. Metody integrirovaniya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Integration methods for ordinary differential equations]. – Moscow: Vysshaya shkola, 1967. – 563 p.[inRussian]